

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Marko Lalović

## **Delne risbe polnih grafov**

DIPLOMSKO DELO  
INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM  
PRVE STOPNJE RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: izr. prof. dr. Gašper Fijavž

Ljubljana, 2014



To delo je ponujeno pod licenco *Creative Commons Priznanje avtorstva-Deljenje pod enakimi pogoji 2.5 Slovenija* (ali novejšo različico). To pomeni, da se tako besedilo, slike, grafi in druge sestavine dela kot tudi rezultati diplomskega dela lahko prosto distribuira, reproducirajo, uporabljajo, priobčujejo v javnosti in predelujejo, pod pogojem, da se jasno in vidno navede avtorja in naslov tega dela in da se v primeru spremembe, preoblikovanja ali uporabe tega dela v svojem delu lahko distribuira predelava le pod licenco, ki je enaka tej. Podrobnosti licence so dostopne na spletni strani [creativecommons.si](http://creativecommons.si) ali na Inštitutu za intelektualno lastnino, Streliška 1, 1000 Ljubljana.



Izvorna koda diplomskega dela, njeni rezultati in v ta namen razvita programska oprema so ponujeni pod licenco GNU General Public License, različica 3 (ali novejša). To pomeni, da se lahko prosto distribuira in/ali predeluje pod njenimi pogoji. Podrobnosti licence so dostopne na spletni strani <http://www.gnu.org/licenses/>.

*Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.*



Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Bruckdorfer in soavtorji v članku “Progress on Partial Edge Drawings” iz leta 2013 študirajo risanje gostih grafov z izrezom sredinskih delov premočrtnih povezav. Pri tem pokažejo, da polnega grafa z vsaj 241 točkami ni možno narisati z izrezom sredinske polovice vsake premočrtne povezave, če se želimo popolnoma izogniti križanju povezav.

Z uporabo alternativnega razbitja okvirja risbe poskusite izboljšati njihovo zgornjo mejo.

Bruckdorfer et al. have in their paper “Progress on Partial Edge Drawings” from 2013 studied rectilinear drawing of dense graphs in which a middle portion of an edge can be removed from the drawing. They have established that the complete graph on at least 241 vertices cannot be drawn by removing the central half of every edge without introducing edge crossings. Improve their upper bound using an alternative tessellation of the drawing frame.



## IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Marko Lalović, z vpisno številko **63090010**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

*Delne risbe polnih grafov*

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom izr. prof. dr. Gašperja Fijavža,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela na svetovnem spletu preko univerzitetnega spletnega arhiva.

V Ljubljani, dne 25. avgusta 2014

Podpis avtorja:





*Mentorju dr. Gašperju Fijavžu se zahvaljujem za njegovo vodenje, dosegljivost in potrpežljivost kakor tudi za vse njegove dragocene predloge in nasvete pri izdelavi diplomske naloge. Njegovi uvidi so mi gotovo veliko pomagali.*

*Hvala staršem za podporo v celotnem času študija. Hvala bratu in prijateljem, s katerimi je bil študij prijetnejši.*

*Hvala tudi odprti računalniški skupnosti za prost dostop do tako močne in zanesljive programske opreme, kot sta operacijski sistem GNU/Linux in sistem za matematično formatiranje TeX.*



Svoji dragi Yao Cheng.



# Kazalo

Povzetek

Abstract

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Kratka zgodovina . . . . .	1
1.2	Zakaj delne risbe . . . . .	2
1.3	Meje za delne risbe . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Priprava</b>	<b>9</b>
2.1	Graf $K_{3,3}$ ni ravninski . . . . .	9
2.2	Geometrija . . . . .	10
2.3	Žarkovni koordinatni sistem . . . . .	11
2.4	Delna risba polnega grafa . . . . .	13
2.5	Zgornja meja . . . . .	20
2.6	Stopničaste funkcije . . . . .	22
2.7	Presečišča . . . . .	24
2.8	Transformacija . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Ocene</b>	<b>29</b>
3.1	Delitev okvirja . . . . .	29
3.2	Osnovni trikotnik . . . . .	30
3.3	Levi in desni trikotnik . . . . .	43
3.4	Spodnji štirikotnik . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Zaključek</b>	<b>61</b>

## *KAZALO*

<b>A Izvorna koda</b>	<b>65</b>
A.1 Pomembnejši moduli . . . . .	65
<b>Literatura</b>	<b>73</b>

# Povzetek

Delna risba grafa je risba, kjer povezave grafa predstavimo z daljicami, pri čemer središčnih polovic daljic ne narišemo. Dodatno zahtevamo, da ni križišč med tako narisanimi povezavami. Trenutno najboljša ocena trdi, da ne obstaja delna risba polnega grafa na 241 ali več točkah. V delu to oceno izboljšamo za faktor več kot dva. Pokažemo, da ni možno narisati delne risbe polnega grafa na 102 ali več točkah. Glavni ideji sta dve. Po eni strani uporabljamo drugačno delitev ravnine, na kateri ležijo točke grafa. Namesto koordinatne delitve uporabljamo območja vzdolž poltrakov iz vnaprej izbranih točk risbe. Dobimo delitev, ki ima podobno geometrijo kot delna risba, vendar pa je odvisna od medsebojne lege vnaprej izbranih robnih točk. Po drugi strani pa celotno risbo grafa analiziramo glede na lokacijo treh, deloma celo štirih, točk risbe in ne le dveh kot v prejšnjih ocenah.

## **Ključne besede:**

delne risbe, teorija grafov, ravninski grafi, analitična geometrija.





# Abstract

Partial edge drawing of a graph is a rectilinear drawing in which a middle portion of an edge is removed from the drawing. In addition, we require that the drawing is without edge crossings. Currently, the best estimate claims that there is no partial edge drawing of the complete graph on 241 or more points. In this work we improve the estimate by a factor of more than two. We show that it is not possible to draw a partial edge drawing of the complete graph on 102 or more points. The main ideas are two. On the one hand, we use a different division of the plane on which the points of the graph are located. Instead of coordinate division of the plane, we use the areas along the rays from pre-selected points of the drawing. We obtain a division which has a similar geometry as partial edge drawing, but it depends on the mutual position of pre-selected boundary points. On the other hand, we analyze the whole drawing of the graph by the location of three, sometimes even four, points of the drawing and not only two points as in the previous estimates.

**Keywords:**

partial edge drawings, graph theory, planar graphs, analytic geometry.



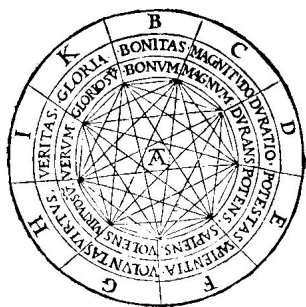
# Poglavje 1

## Uvod

### 1.1 Kratka zgodovina

Risbe polnih grafov  $K_n$  s točkami, vpetimi v oglišča pravilnih  $n$ -kotnikov, so se pojavile že v 13. stoletju v delu *Ars Magna* avtorja Ramona Llulla [1]. Slika 1.1a prikazuje *Llullovo krog*, risbo mehanizma, ki prikaže vse možne kombinacije abecede. Za te kombinacije je Ramon Llull trdil, da pokažejo vso resnico o zadevi, ki jo raziskujemo. Ta pristop velja za zgodnji poskus uporabe logičnih sredstev za pridobivanje znanja. Llullove ideje sta izpopolnjevala Giordano Bruno v 16. stoletju in Gottfried Leibniz v 17. stoletju, ki je te ideje poimenoval *ars combinatoria*, po čemer so znane še danes. Nekateri računalniški znanstveniki so Ramona Llulla sprejeli za nekakšnega očeta informacijske znanosti, katere začetek predstavlja njegov sistem logike [2].

Umetnik in računalniški raziskovalec David Link meni [3], da je dobil Ramon Llull navdih za svoj mehanizem na svojih potovanjih pri študiju arabske kulture z opazovanjem arabskih naprav, imenovanih *zairja*, ki jih je uporabil kot prototip za svoj izum. Zairja je bil le eden od mehanizmov, ki so jih gradili v arabskem svetu po razpadu rimskega imperija. Enega od prvih mehanizmov, za katerega predvidevajo, da je star najmanj 2000 let, so arheologi odkrili v začetku leta 1901 v razbitinah rimske tovarne ladje blizu otoka Antikythera in ga zato imenujemo *mehanizem Antikythera*. Mehanizem hranijo v grškem Narodnem muzeju v Atenah, prikazan je na Sliki 1.1b. Ker so mehanizem Antikythera razvili v antični Grčiji, našli pa na rimski ladji, je bil morda vojni plen rimskega cesarja



(a) Llullov krog.



(b) Mehanizem Antikythera.

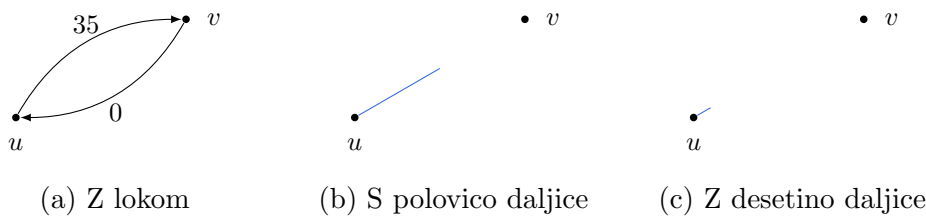
Slika 1.1: Mehanizma.

Julija Cezarja. Danes je splošno sprejeta razlaga Dereka de Solla Pricea, da so mehanizem uporabljali za računanje časa na podlagi gibanja Sonca in Lune. Ta mehanizem je torej neke vrste analogni računalnik antičnega sveta. Znanstveniki predvidevajo, da ga je v drugem stoletju pred našim štetjem razvil starogrški astronom in matematik Hipparchos [4].

## 1.2 Zakaj delne risbe

Delne risbe definiramo v naslednjem poglavju, kjer natančno predpišemo delež narisanih povezav in prepovemo kakršno koli sekanje med delno narisanimi povezavami. V tem razdelku opišemo, od kod je prišla ideja za delne risbe, in na kratko predstavimo ozadje delnih risb.

V zvezi s problemom izogibanja sekanju povezav pri risbah grafov so bile doslej narejene številne raziskave v matematiki, računalništvu, na področju vizualnih učinkov in psiholoških raziskav. Da bi se izognili sekanju povezav v grafih, so dosedanja raziskovalci preučili in predlagali nove načine prikazovanja povezav. V članku [5] iz leta 1995 so Becker in sodelavci prvi predlagali radikalno nov pristop k izogibanju sekanja povezav pri dvodimenzionalnih risbah neravninskih grafov. Članek je bil motiviran s področjem prikazovanja velike količine omrežnih podatkov. Avtorji članka so razvili grafično orodje *SeeNet* z okoli 6000 vrsticami izvorne kode za statično in dinamično prikazovanje omrežnih podatkov. Orodje in tehnike prikazovanja podatkov so v članku predstavili na primeru prikazovanja podatkov nacionalnega telekomunikacijskega omrežja, ki ga je uporabljalo pod-

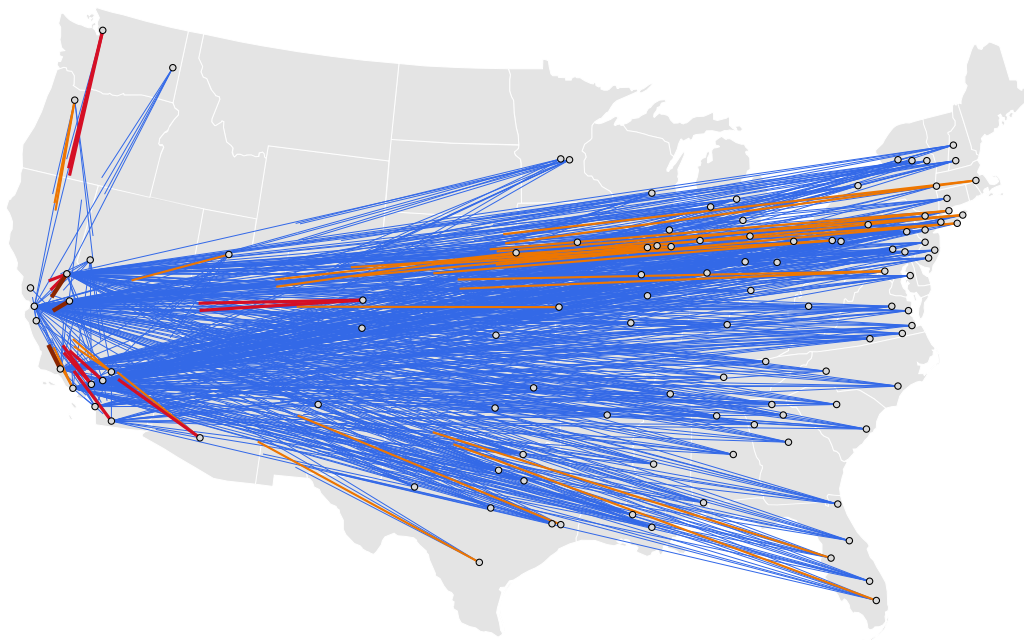


Slika 1.2: Različni načini risanja povezav

jetje AT&T za telefonske klice na dolge razdalje za dan 17. oktober 1989, ko se je zgodil potres na območju San Francisca.

Ob katastrofičnih dogodkih, kakršen je tudi potres, pride v telekomunikacijskem omrežju do preobremenitve stikal oziroma vozlišč omrežja. Preučiti so želeli vprašanja v zvezi z zmogljivostjo omrežja in prometnih tokov. Zanimalo jih je, kje v omrežju so nastale preobremenitve in katere povezave so prenašale največ prometa. V primeru so bili vključeni podatki o 110 vozliščih. O vsakem vozlišču so razpolagali s podatki o geografski lokaciji in s statističnimi prometnimi podatki. Prikazati so želeli statistiki *poskusi klicanja* med poljubnima vozliščema omrežja  $u$  in  $v$ . Statistiki predstavljata število poskusov klicanja iz vozlišča  $u$  v vozlišče  $v$  in število poskusov klicanja iz  $v$  v  $u$ . Prvi prikaz podatkov, ki so si ga izbrali, je bila risba usmerjenega grafa.

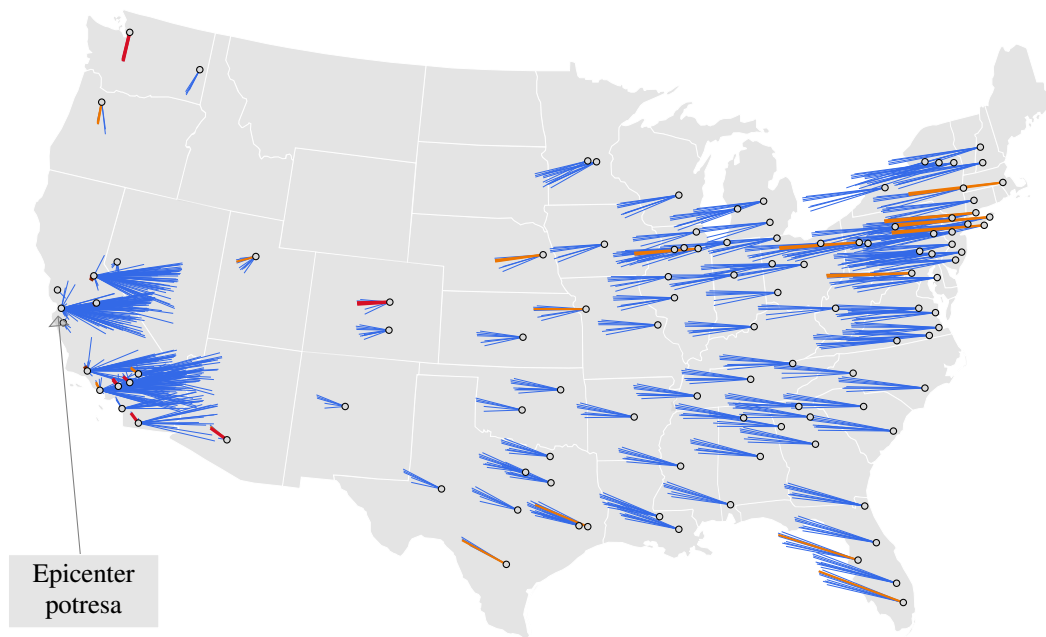
Statistiko poskusov klicev med vozlišči lahko prikažemo na več načinov. Z izbiro konvencionalnega prikaza usmerjenih grafov bi narisali puščice med pari vozlišč in nad puščicami napisali število poskusov klicev v določeni smeri. Primer povezave, prikazane na konvencionalen način, je na Sliki 1.2a, ki prikazuje 35 poskusov klicev iz  $u$  v  $v$  in 0 poskusov klicev v obratni smeri. Pri risbah večjih grafov, z recimo vsaj 100 vozlišči in z več kot desetimi odstotki vseh možnih povezav, pa lahko risba grafa postane nepregledna. Kompaktnejši način, ki so si ga izbrali avtorji članka, je ta, da za prikaz statistike narišemo le polovico daljice med vozliščema. Začetek daljice postavimo v vozlišče, ki je izvor statistike. Če je statistika v določeni smeri 0, potem polovice daljice v tej smeri ne narišemo. Sicer jo prikažemo s polovico daljice, katere širina je sorazmerna statistiki. Statistiko kodiramo tudi tako, da polovico daljice pobarvamo z barvo, pri čemer je temperatura barve sorazmerna statistiki. Primer kompaktnejše povezave je na Sliki 1.2b, ki prikazuje iste podatke kot Slika 1.2a.



Slika 1.3: Klici med lokacijami v času po potresu.

Iz zaslonske slike grafičnega orodja, kjer so avtorji predstavili prikazovanje podatkov v obliki matrike, smo rekonstruirali podatke podjetja AT&T o preobremenitvi omrežja na dan 17. oktober 1989. Narisali smo risbo usmerjenega grafa na Sliki 1.3 enako kot avtorji članka, vendar z drugim orodjem. Vozlišča grafa smo narisali na zemljevid ZDA, s čimer smo predstavili podatke o geografski lokaciji vozlišč. Take risbe je treba po navadi izdelati z veliko mero previdnosti, da zmanjšamo nepreglednost risbe. Vozliščem, ki so bila po geografski lokaciji preblizu skupaj, smo malo spremenili postavitev in s tem zmanjšali gostoto narisanih vozlišč in povezav. Točke in pomembne povezave z veliko preobremenitvijo smo narisali nazadnje, tako da so na vrhu in jih ne sekajo in ne prekrivajo druge povezave. Širine in barve povezav smo izbrali tako, da izražajo pomen. Kljub izbiri kompaktnejše predstavitev in vsem tem previdnostim, je Slika 1.3 še vedno nepregledna. Zaradi preobilja daljic prihaja do ogromno sekanja in prekrivanja med njimi. Težko je videti, katera od vozlišč so najbolj prizadeta. Dolge medcelinske povezave prekrivajo sredino zemljevida in morebitne težave spodaj. Prav tako ni jasno, kje se polovice daljic končajo.

Za rešitev teh težav so v članku poleg drugačnih predstavitev podatkov pre-



Slika 1.4: Klici med lokacijami, predstavljeni z delnimi povezavami.

dlagali interaktivno nastavljanje parametrov risb z njihovim orodjem. V primeru risbe usmerjenega grafa so delež narisanih povezav spreminjali kot parameter in rešili težave s tem, da so narisane daljice skrajšali na eno desetino. Tako kot avtorji članka smo narisali risbo na Sliki 1.4 z istimi podatki kot prej, pri čemer pa smo skrajšali narisane povezave na le eno desetino daljice med vozliščema za prikaz statistike. Začetek daljice smo, kot pri kompaktnih povezavah, postavili v vozlišče, ki je izvor statistike. Slika 1.2c prikazuje tako skrajšano povezavo. Nastala risba na Sliki 1.4 je veliko bolj jasna. Skrajšane povezave kažejo, da je prišlo do vseh omrežnih preobremenitev le v smeri proti zahodni obali in v smeri od zahodne proti vzhodni obali. Če bi prišlo do preobremenitev nekje na sredini ZDA, bi imela tam nekatera vozlišča krožno pahljačo delnih narisanih povezav.

Michael Burch je s sodelavci raziskal berljivost usmerjenih grafov, narisanih z delnimi povezavami [6]. Zanimalo jih je, ali so tako narisani grafi še vedno dovolj berljivi, razumljivi in kako dobro so jih ljudje sposobni interpretirati v primerjavi z običajnimi risbami grafov s celimi povezavami. Za pridobitev odgovorov na ta vprašanja so izvedli nadzorovan poskus z 42 udeleženci za tri različne naloge:

- 1) ugotavljanje obstoja neposredne povezave med dvema točkama,

- 2) ugotavljanje obstoja nedirektne povezave z eno vmesno točko in
- 3) iskanje točke z največjim številom navzven usmerjenih povezav.

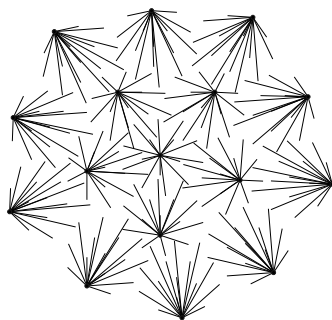
Primerjali so odgovore, ki so jih prejeli pri grafih z delno narisanimi povezavami, z odgovori za grafe s celimi povezavami. Ugotovili so, da so udeleženci s krajšanjem dolžine delnih povezav postajali veliko hitrejši in delali vedno manj napak pri izpolnitvi naloge 3. Pri nalogah 1 in 2 so s krajšanjem dolžine delnih povezav delali vedno več napak. Zanimiv padec v potrebnem času za izpolnitev naloge 1 in 2 se je zgodil pri risbah, kjer so bile povezave skrajšane na okrog 75 odstotkov. To kaže, da okrog 75 odstotkov dolžine narisanih povezav zagotavlja optimalno ravnovesje med zmanjšanjem nereda in zaznavanjem povezav pri pogojih in preizkusnih parametrih, ki so si jih izbrali avtorji članka.

### 1.3 Meje za delne risbe

Prva, ki sta formalizirala problem risanja grafov z delnimi povezavami in zanj vpeljala koncepta simetrija in homogenost, sta bila Bruckdorfer in Kaufmann [7]. V tem delu obravnavamo simetričen in homogen problem. Definiramo delno risbo, kjer povezave grafa predstavimo z daljicami, pri čemer središčnih polovic daljic ne narišemo. Dodatno zahtevamo, da ni križišč med tako narisanimi povezavami. Za delno risbo pravimo, da je simetrična, ker sta narisana dela povezave enake dolžine. Zaradi simetričnosti delne risbe, lažje sklepamo o obstoju posamezne povezave. Pravimo tudi, da je delna risba homogena, ker je delež narisane dela povezave enak za vse povezave. Zaradi homogenosti iz prvega krajišča lažje poiščemo drugo krajišče povezave, ker je razdaljo do drugega krajišča mogoče oceniti iz dolžine narisane dela povezave. Poleg tega s tem, ko narišemo četrtini povezave, izenačimo delež narisane in izbrisanega dela. Bruckdorfer in Kaufmann [7] sta želela odgovoriti tudi na vprašanje, katere grafe lahko narišemo kot delno risbo. Pokazala sta, da lahko vsak polni graf  $K_n$  za  $n = 1, 2, \dots, 11$  narišemo kot delno risbo. S poizkušanjem oziroma lokalno optimizacijo sta pokazala, da je možno tudi  $K_{16}$  narisati kot delno risbo. Rezultat je prikazan na Sliki 1.5, ki smo jo narisali z uporabo koordinat Bruckdorferja in Kaufmanna.

Bruckdorfer in sodelavci [8] so pokazali, da je zgornja meja za število točk



Slika 1.5: Delna risba grafa  $K_{16}$ 

polnega grafa, ki ga lahko narišemo kot delno risbo, končna. Začeli so s preprostim dokazom, da ni možno narisati delne risbe polnega grafa na sedemnajstih točkah, ki ležijo v *enostranskem konveksnem položaju*. Po rezultatu Erdősa in Szekeresa [11] vsaka množica z več kot

$$\binom{2k-4}{k-2}$$

točkami vsebuje podmnožico v enostranskem konveksnem položaju s  $k$  točkami. Če v zgornji izraz vstavimo  $k = 17$ , pridemo do prve ocene, da za vsak

$$n > \binom{30}{15}$$

ne moremo narisati delne risbe polnega grafa na  $n$  točkah. Prvo oceno so Bruckdorfer in sodelavci [7] precej izboljšali. Uporabili so koordinatno delitev ravnine, na kateri so narisane točke polnega grafa, na pravokotnike in pokazali, da ni možno narisati delne risbe polnega grafa na 241 ali več točkah.

To oceno s svojimi idejami izboljšamo za več kot dvakrat. Pokažemo, da ni možno narisati delne risbe polnega grafa na 101 ali več točkah. Glavni ideji sta dve. Prva je drugačna izbira delitve ravnine, na kateri ležijo točke grafa. Koordinatna delitev na pravokotnike nima prave zveze z geometrijo delne risbe. Naš pristop k iskanju primerne delitve ravnine je temeljil na žarkih iz vnaprej izbranih robnih točk risbe. S tem so meje delitve vzporedne z vsaj eno od delnih povezav. Dobimo delitev, ki ima podobno geometrijo kot delna risba. Vendar nam analizo uteži to, da je delitev zdaj odvisna od medsebojne lege vnaprej izbranih robnih točk. Druga ideja je, da celotno risbo grafa analiziramo glede na lokacijo treh, deloma celo štirih, točk risbe in ne le dveh kot v prejšnjih ocenah.

Sledi drugo poglavje, Priprava, v katerem najprej predstavimo glavno orodje (dejstvo, da graf  $K_{3,3}$  ni ravninski), ki nam omogoča kontrolo števila točk delne risbe. Sledijo definicije iz geometrije. Nato definiramo osnovne pojme in vzpostavimo terminologijo in notacijo. Pomembnejše pojme označujejo podnaslovi podpoglavij, v katerih te pojme definiramo. Dokažemo trditve in izreke, ki so služili kot gradniki pri konstrukciji dokazov v tretjem poglavju, Ocene.

V tretjem poglavju, Ocene, najprej definiramo okvir, v katerem ležijo vse točke grafa delne risbe. Okvir razdelimo glede na tri izbrane robne točke na naslednja območja:

- osnovni trikotnik,
- levi in desni trikotnik ter
- spodnji štirikotnik.

V podpoglavjih za vsako območje posebej pokažemo zgornjo mejo števila točk delne risbe, ki ležijo v tem območju. Za osnovni trikotnik lahko predpostavimo, da je enakostraničen, in večkrat izkoristimo simetričnost. Zato enostavneje pridemo do ocene. Drugače je s preostalimi območji. Levi in desni trikotnik razdelimo na celice tako, da vsaka celica vsebuje največ eno točko delne risbe. Položaj in število teh celic pa se spreminjata glede na položaj izbrane robne točke. Za delitev spodnjega štirikotnika poleg celic uporabimo še druge vrste večkotnikov, ki so spet odvisni od položaja izbrane robne točke.

V Zaključku združimo ocene v končen rezultat in ga predstavimo grafično. Zaradi odvisnosti delitve od medsebojne lege robnih točk je rezultat analize funkcija, ki predstavlja oceno za zgornjo mejo števila točk delne risbe. Z ilustracijami prikažemo delitev okvirja v kritični legi robnih točk, kjer ta funkcija doseže maksimum. Rezultat ovrednotimo in predlagamo možne nadaljnje smernice analiz. V dodatku A je izvorna koda pomembnejših izračunov, ki so pomagali pri izdelavi ocen.

# Poglavje 2

## Priprava

V delu uporabljamo standardne definicije in rezultate iz teorije grafov. Sledimo [9] in se praviloma držimo notacije in oznak iz omenjene monografije.

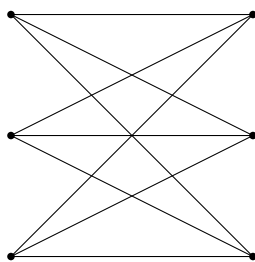
### 2.1 Graf $K_{3,3}$ ni ravninski

Glavno orodje, ki nam omogoča dokazati presečišča krivulj, daljic, lokov in s tem kontrolo števila točk delne risbe, temelji na dejstvu, da grafa  $K_{3,3}$  ne moremo narisati v ravnini brez križišč. To sledi iz Izreka Kuratowskega [10].

**Izrek 2.1** (Eulerjeva formula). *Naj bo  $G$  povezan ravninski graf in naj bodo  $n$ ,  $m$  in  $f$  število točk, število povezav in število lic katere koli ravninske risbe grafa  $G$ . Potem velja zveza:*

$$n - m + f = 2. \quad (2.1)$$

*Dokaz.* Eulerjevo formulo dokažemo z matematično indukcijo po  $\ell = m - n + 1$ , ki označuje razliko med številom povezav grafa  $G$  in številom povezav vsakega njegovega vpetega drevesa. Pri  $\ell = 0$  je  $G$  drevo. Vsaka risba drevesa ima eno samo lice. Ravno tako je  $n - m + 1 = 2$  in zanj formula drži. Predpostavimo, da formula drži za vse povezane ravninske grafe, kjer je  $m - n + 1 < \ell$ . Opazujmo izbrano risbo ravninskega grafa  $G$ , za katerega velja  $m - n + 1 = \ell \geq 1$ .  $G$  ni drevo, zato vsebuje vsaj en cikel  $C$ . Naj bo  $e$  povezava v ciklu  $C$ . Če izbrišemo sliko povezave  $e$ , pridelamo ravninsko risbo povezanega ravninskega grafa  $G - e$ , ki ima  $m - 1$  povezav in  $f - 1$  lic. Zato po indukcijski predpostavki dobimo

Slika 2.1: Graf  $K_{3,3}$ .

rezultat

$$n - m + f = n - (m - 1) + (f - 1) = 2.$$

□

Eulerjevo formulo uporabimo za dokaz neravninskosti grafa  $K_{3,3}$ .

**Posledica 2.2.** *Poln dvodelen graf  $K_{3,3}$  ni ravninski.*

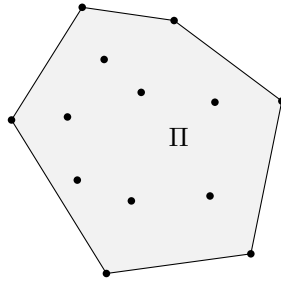
*Dokaz.* Graf  $K_{3,3}$ , predstavljen na Sliki 2.1, ima  $n = 6$  vozlišč in  $m = 9$  povezav. Denimo, da je  $K_{3,3}$  ravninski in izberemo njegovo ravninsko risbo. Število lic te risbe je po Eulerjevi formuli enako  $f = 5$ . Ker je  $K_{3,3}$  enostaven in dvodelen graf, ima najkrajši možen cikel dolžino štiri. Vsako lice je zato omejeno z vsaj štirimi povezavami. Skupno število povezav je enako polovici vsote dolžin lic, kar znese vsaj  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ , kar je protislovje. Zato  $K_{3,3}$  ni ravninski. □

## 2.2 Geometrija

V tem delu uporabljamo samo evklidsko razdaljo, pridevnik evklidski bomo v nadaljevanju izpuščali. Obravnavali bomo končne množice točk v ravnini z določenimi omejitvami in želeli oceniti največje možno število točk. Zato potrebujemo nekaj definicij.

**Definicija 2.3.** *V evklidski ravnini je*

- *konveksna množica  $\Pi$  taka množica, da je za vsak par točk  $x, y \in \Pi$ , tudi daljica  $\overline{xy}$  med  $x$  in  $y$  vsebovana v  $\Pi$ ;*
- *konveksna ovojnica  $\text{Conv}(\Pi)$  množice točk  $\Pi$  najmanjša konveksna množica, ki vsebuje vse točke iz  $\Pi$ ;*

Slika 2.2: Konveksna ovojnica  $Conv(\Pi)$ .

- premer  $diam(p, p')$  množice točk  $\Pi$  je največja razdalja med poljubnima točkama  $p, p'$  iz  $\Pi$ .

Na Sliki 2.2 je primer množice  $\Pi$  in konveksne ovojnice  $Conv(\Pi)$ . Vpeljimo še nekaj oznak. Z  $\diamond abcd$  označimo konveksen štirikotnik z oglišči  $a, b, c, d$ , ki si v tem vrstnem redu sledijo vzdolž njegovih robov. Če bosta stranici konveksnega štirikotnika vzporedni koordinatnima osema, bomo uporabljali tudi natančnejšo oznako  $\square abcd$ . Z  $\triangle abc$  označimo trikotnik z oglišči  $a, b, c$ . Dolžino daljice, določene s točkama  $x, y$ , označimo z  $|xy|$ .

**Definicija 2.4.** Pravimo, da je družina nepraznih konveksnih poligonov

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\},$$

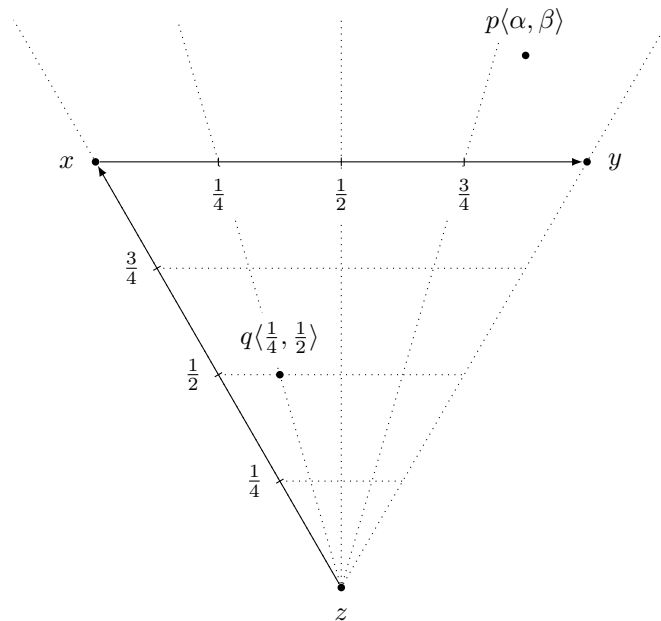
geometrijsko razbitje poligona  $L$ , če je

$$L = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$$

in za poljubna  $C_i, C_j, i \neq j$ , velja, da je  $C_i \cap C_j$  del njunega skupnega roba.

## 2.3 Žarkovni koordinatni sistem

V naslednjem poglavju večkrat opazujemo, v kakšni legi so točke v odvisnosti od lege do treh izbranih točk  $x, y$  in  $z$ . Za poljubno točko  $p$ , ki leži v ostrem kotu  $\angle xyz$ , glej Sliko 2.3, nas zanima, kje žarek iz točke  $z$  skozi točko  $p$  seka daljico  $\overline{xy}$  in na kakšni “višini” je točka  $p$  od lege točke  $z$ . Zato uvedemo alternativni koordinatni sistem.



Slika 2.3: Žarkovni koordinatni sistem.

**Definicija 2.5.** Naj bodo  $x, y$  in  $z \in \mathbb{R}^2$  fiksne nekolinearne točke. Poljubno točko  $p \in \mathbb{R}^2$  lahko izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev  $\vec{xy}$  in  $\vec{zx}$  na način

$$z\vec{p} = \alpha \cdot \beta \cdot \vec{xy} + \beta \cdot \vec{zx}, \quad \text{za} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

V žarkovnem koordinatnem sistemu (ŽKS) glede na  $x, y, z$  vsako točko  $p$  iz ravnine določimo z urejenim parom  $(\alpha, \beta)$  in pišemo  $p\langle \alpha, \beta \rangle$ . Točko  $z$  imenujemo izhodišče in žarek iz  $z$  skozi  $x$  imenujemo žarkovna os. Tretja točka, ki določa ŽKS, je  $y$ . Prvo koordinato  $\alpha$  imenujemo žarkovni kot in drugo koordinato  $\beta$  imenujemo žarkovna višina točke  $p$ . Poltrak z izhodiščem v  $z$ , ki gre skozi točko  $z$  žarkovnim kotom  $\xi$ , imenujemo  $\xi$ -žarek.

Na primer, če velja  $z\vec{q} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\vec{xy} + \vec{zx})$ , ima točka  $q$  žarkovni koordinati  $q\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle$  v ŽKS glede na  $x, y, z$ .

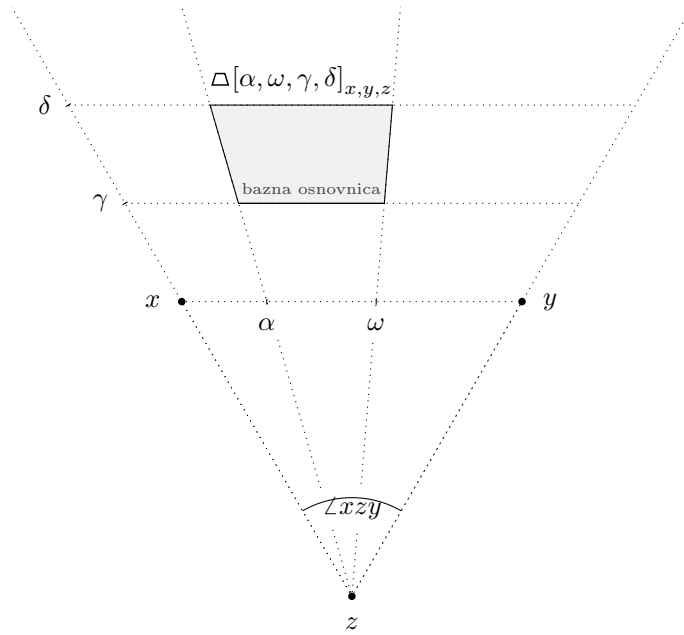
**Definicija 2.6.** V žarkovnem koordinatnem sistemu glede na točke  $x, y, z$  je žarkovni trapez

$$\Delta[\alpha, \omega, \gamma, \delta]_{x, y, z}$$

trapez z oglišči  $\langle \alpha, \gamma \rangle, \langle \omega, \gamma \rangle, \langle \omega, \delta \rangle, \langle \alpha, \delta \rangle$ , ki leži v konveksnem kotu  $\angle xzy$ , glej Sliko 2.4. Žarkovni trapez  $\Delta[\alpha, \omega, \gamma, \delta]_{x,y,z}$  ustreza kartezičnemu produktu

$$[\alpha, \omega] \times [\gamma, \delta].$$

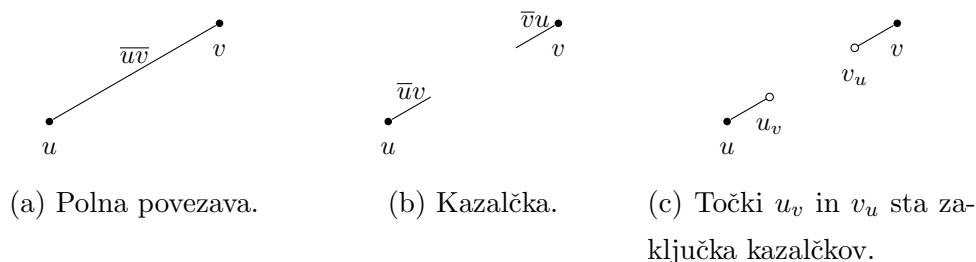
Nasprotni stranici trapeza, ki sta vsebovani v  $z$ -žarkih, imenujemo kraka, preostali dve stranici, ki sta vzporedni daljici  $\overline{xy}$ , pa osnovnici. Osnovnico, ki je bližje točki  $z$ , imenujemo bazna osnovnica. Implicitno smo privzeli, da je  $\alpha \leq \omega$  in  $\gamma \leq \delta$ .



Slika 2.4: Žarkovni trapez v koordinatnem sistemu glede na  $x, y, z$ .

## 2.4 Delna risba polnega grafa

Naj bo  $\Pi$  končna množica točk v ravnini in  $n = |\Pi|$ . Za vsak par točk  $uv \in \Pi$  narišemo samo skrajni četrtni daljice  $\overline{uv}$ , izpustimo pa središčno polovico. Začetno četrtno daljice  $\overline{uv}$ , ki vsebuje krajišče  $u$ , imenujemo *kazalček* od  $u$  do  $v$  in jo označimo z  $\overline{uv}$ . Točko  $u$  imenujemo tudi *začetek* kazalčka  $\overline{uv}$ , drugo krajišče kazalčka pa njegov *zaključek*. Unijo obeh kazalčkov  $\overline{uv}$  in  $\overline{vu}$  imenujemo *delna povezava* med točkama  $u$  in  $v$ . Če se poljubni dve delni povezavi sekata samo v



Slika 2.5: Kako narišemo delno povezavo.

njunem morebitnem skupnem krajišču, pravimo, da je dobljena struktura *delna risba polnega grafa*  $K_n$ , množici točk  $\Pi$  pa njena *osnova*. Zapišimo še formalno.

**Definicija 2.7.** Naj bosta  $u$  in  $v$  točki v ravnini. Kazalček  $\bar{u}v$  je daljica s krajiščema  $u$  in  $\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}v$ , glej Sliko 2.5b. Kazalček  $\bar{u}v$  imenujemo tudi *v-kazalček* točke  $u$ . Krajišči  $u$  in  $\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}v$  kazalčka  $\bar{u}v$  imenujemo po vrsti začetek in zaključek kazalčka, glej Sliko 2.5c. Zaključek kazalčka  $\bar{u}v$  označimo z  $u_v$ . Delna povezava med točkama  $u$  in  $v$  je unija obeh kazalčkov  $\bar{u}v$  in  $\bar{v}u$ .

**Definicija 2.8.** Naj bo  $\Pi$  končna množica točk v ravnini moči  $n$ . Z  $\mathcal{D}(\Pi)$  označimo unijo delnih povezav med vsemi pari točk iz  $\Pi$ .

$$\mathcal{D}(\Pi) = \bigcup_{u,v \in \Pi} (\bar{u}v \cup \bar{v}u) \quad (2.2)$$

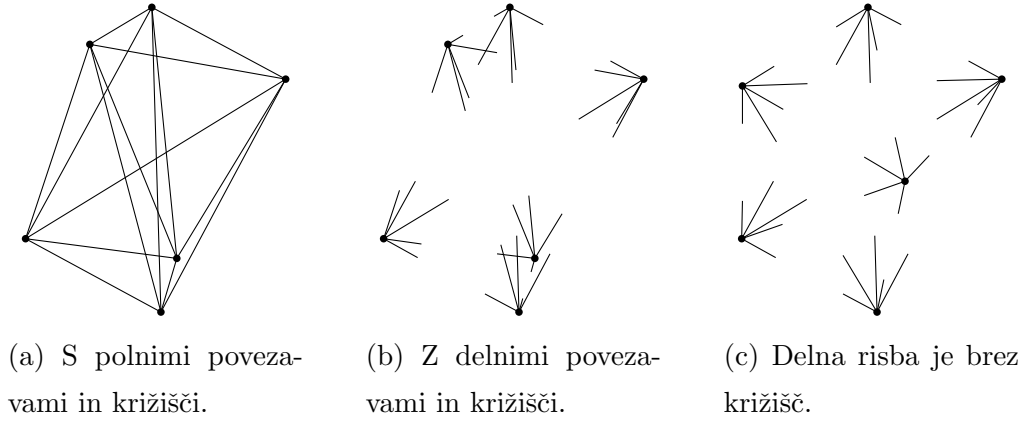
Če za poljubni delni povezavi  $(\bar{u}v \cup \bar{v}u)$  in  $(\bar{u}'v' \cup \bar{v}'u')$ ,  $u, v, u', v' \in \Pi$  velja, da se sekata samo v morebitnem skupnem krajišču (denimo, če je  $u = u'$ ), potem pravimo, da je  $\mathcal{D}(\Pi)$  *delna risba polnega grafa*  $K_n$ . Množici točk  $\Pi$  pa pravimo *osnova delne risbe polnega grafa*  $\mathcal{D}(\Pi)$ .

Na Sliki 2.6a smo narisali primer polnega grafa. Isti graf smo narisali z delnimi povezavami na Sliki 2.6b. Čeprav smo povezave narisali delno, opazimo, da kršimo zahtevo o nesekanju povezav. Isti graf lahko narišemo z delnimi povezavami brez sekanja, če točke ustrezno premaknemo, glej Sliko 2.6c. Tako risbo imenujemo *delna risba polnega grafa*  $K_6$ .

Enostavno se je prepričati, da so točke osnove delne risbe v splošni legi.

**Lema 2.9.** Če je  $\Pi$  osnova delne risbe polnega grafa, potem  $\Pi$  ne vsebuje treh kolinearnih točk.



Slika 2.6: Različne risbe polnega grafa  $K_6$ .

*Dokaz.* Predpostavimo, da množica  $\Pi$  vsebuje kolinearne točke  $u, v, w$ . Če leži točka  $v$  strogo med  $u$  in  $w$ , je kazalček  $\bar{u}v$  vsebovan v kazalčku  $\bar{u}w$ . To v delni risbi ni možno.  $\square$

Za vsako potencialno osnovo delne risbe  $\Pi$  bomo odslej privzeli, da ne vsebuje treh kolinearnih točk.

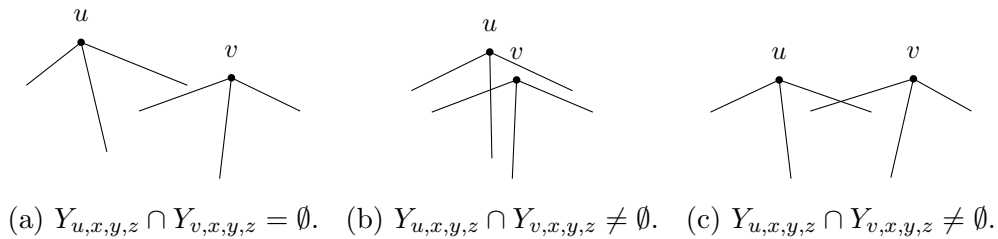
Pri oceni števila točk delne risbe polnega grafa nas zanima, ali za dve točki iz nekega območja nujno pride do sekanja med kazalčki do treh vnaprej izbranih točk. Zato vpeljemo pojem *dežnička*.

**Definicija 2.10.** Izberimo tri nekolinearne točke  $x, y, z$ . Za poljubno točko  $p$  definiramo dežniček  $Y_{p,x,y,z}$  točke  $p$  kot unijo njenih  $x, y, z$  kazalčkov:

$$Y_{p,x,y,z} = \bar{p}x \cup \bar{p}y \cup \bar{p}z.$$

Na Sliki 2.7a smo narisali primer brez sekanja med dežničkoma točk  $u$  in  $v$  do treh vnaprej izbranih točk, ki niso del omenjene slike. Sliki 2.7b in 2.7c prikazujeta primera, ko pride do sekanja med dežničkoma.

Naj ima  $p$  žarkovni koordinati  $p = \langle \beta, \delta \rangle$ , potem lahko izračunamo žarkovne



Slika 2.7: Možni preseki dežničkov.

koordinate zaključkov dežnička  $Y_{p,x,y,z}$ :

$$p_x = \left\langle \frac{3\delta\beta}{1+3\delta}, \frac{1+3\delta}{4} \right\rangle, \quad (2.3)$$

$$p_y = \left\langle \frac{1+3\delta\beta}{1+3\delta}, \frac{1+3\delta}{4} \right\rangle, \quad (2.4)$$

$$p_z = \left\langle \beta, \frac{3}{4}\delta \right\rangle. \quad (2.5)$$

**Posledica 2.11.** Izberimo ŽKS glede na  $x, y, z$  in naj bo žarkovni kot  $\beta \in (0, 1)$  fiksni. Z naraščajočo žarkovno višino  $\delta \geq 0$  je

$$\frac{3\delta\beta}{1+3\delta}$$

naraščajoča funkcija višine  $\delta$  in

$$\frac{1+3\delta\beta}{1+3\delta}$$

padajoča funkcija višine  $\delta$ . To pomeni, da se pri fiksnem kotu  $\beta$ , z naraščajočo višino, žarkovni kot zaključka  $p_x$  zmanjšuje in žarkovni kot zaključka  $p_y$  povečuje.

Definirajmo žarkovne trapeze z določenimi lastnostmi kot dodatno terminologijo za določanje zgornje meje v naslednjem poglavju.

**Definicija 2.12.** V žarkovnem koordinatnem sistemu glede na točke  $x, y, z$  stansi  $S_{\bar{x}y}$  in  $S_{\bar{y}x}$  žarkovna trapeza

$$S_{\bar{x}y} = \Delta \left[ 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{4}{3} \right]_{x,y,z}$$

in

$$S_{\bar{y}x} = \Delta \left[ \frac{3}{4}, 1, 1, \frac{4}{3} \right]_{x,y,z}.$$

**Trditev 2.13.** Če so  $x, y, z \in \Pi$ , očitno velja

$$(S_{\bar{x}y} \setminus \{x\}) \cap \Pi = \emptyset \quad (2.6)$$

in

$$(S_{\bar{y}x} \setminus \{y\}) \cap \Pi = \emptyset. \quad (2.7)$$

*Dokaz.* Za vsak  $p \in S_{\bar{x}y}$  oziroma  $p \in S_{\bar{y}x}$  kazalček  $\bar{p}z$  seka bazno osnovnico sence  $S_{\bar{x}y}$  oziroma sence  $S_{\bar{y}x}$ . Bazna osnovnica sence  $S_{\bar{x}y}$  je kazalček  $\bar{x}y$  in bazna osnovnica sence  $S_{\bar{y}x}$  je kazalček  $\bar{y}x$ , zato  $p \notin \Pi \setminus \{x, y\}$ .  $\square$

**Definicija 2.14.** V žarkovnem koordinatnem sistemu glede na točke  $x, y, z$  je pas  $L$  žarkovni trapez

$$L = \Delta[\alpha, \omega, \gamma, \delta]_{x,y,z},$$

za katerega je

$$\gamma \geq \frac{3}{4} \cdot \delta.$$

Parametroma  $\gamma$  in  $\delta$  pravimo spodnja in zgornja višina pasu  $L$ , parametroma  $\alpha$  in  $\omega$  pa leva in desna meja.

Posledica pogoja  $\gamma \geq \frac{3}{4}\delta$  je, da za vsako točko  $p \in L$  kazalček  $\bar{p}z$  seka bazno osnovnico pasu  $L$  (velja celo več, kazalček  $\bar{p}z$  seka vzporednico daljici  $\bar{x}y$  na višini  $\frac{3}{4}\delta$ ).

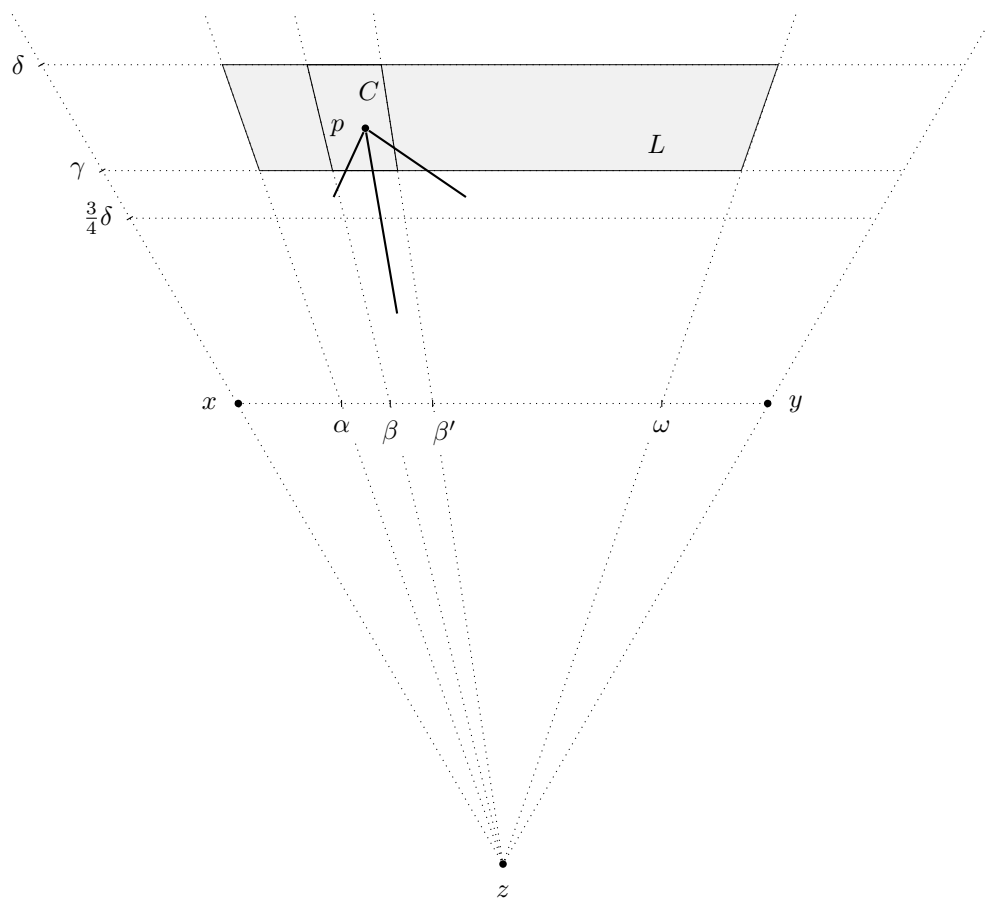
**Definicija 2.15.** V žarkovnem koordinatnem sistemu glede na točke  $x, y, z$  je celica  $C$  žarkovni trapez

$$C = \Delta[\beta, \beta', \gamma, \delta]_{x,y,z}$$

v pasu  $L = \Delta[\alpha, \omega, \gamma, \delta]_{x,y,z}$ , pri čemer za vsako točko  $p \in C$  velja:

- kazalček  $\bar{p}x$  seka  $\beta$ -žarek;
- kazalček  $\bar{p}y$  seka  $\beta'$ -žarek;
- kazalček  $\bar{p}z$  seka bazno osnovnico celice  $L$ .

Parametroma  $\beta$  in  $\beta'$  pravimo leva in desna meja celice  $C$ .

Slika 2.8: Maksimalna celica  $C$  v pasu  $L$ .

Kazalček  $\bar{p}z$  seka bazno osnovnico zaradi zveze med spodnjo in zgornjo višino pasu  $L$ . Poiščimo zveze med levo in desno mejo  $\beta$  in  $\beta'$  v celici  $C$ . Po (2.3) in (2.4) velja

$$\beta' \leq \frac{(1+3\delta)\beta}{3\delta}$$

in

$$\beta' \leq \frac{1+3\delta\beta}{1+3\delta}.$$

**Definicija 2.16.** Celica  $C = \Delta[\beta, \beta', \gamma, \delta]_{x,y,z}$  v pasu  $L = \Delta[\alpha, \omega, \gamma, \delta]_{x,y,z}$  je maksimalna, če za vsak interval

$$I = [\xi, \xi'],$$

za katerega je

$$[\beta, \beta'] \subsetneq [\xi, \xi'],$$

žarkovni trapez  $\Delta[\xi, \xi', \gamma, \delta]_{x,y,z}$  ni celica.

To pomeni, da za maksimalno celico  $\Delta[\beta, \beta', \gamma, \delta]_{x,y,z}$  velja

$$\beta' = \frac{(1+3\delta)\beta}{3\delta} \quad \text{in} \quad \beta' \leq \frac{1+3\delta\beta}{1+3\delta}$$

ali

$$\beta' = \frac{1+3\delta\beta}{1+3\delta} \quad \text{in} \quad \beta' \leq \frac{(1+3\delta)\beta}{3\delta}.$$

**Trditev 2.17.** Označimo

$$f_{1,\delta}(\beta) = \frac{(1+3\delta)\beta}{3\delta}, \tag{2.8}$$

$$f_{2,\delta}(\beta) = \frac{1+3\delta\beta}{1+3\delta}. \tag{2.9}$$

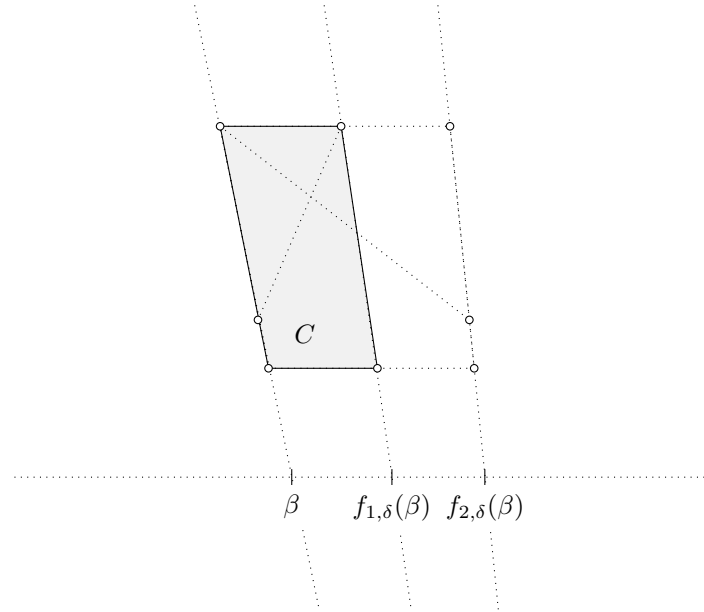
Če je

$$\beta' = \min \{f_{1,\delta}(\beta), f_{2,\delta}(\beta)\},$$

potem je celica  $C = \Delta[\beta, \beta', \gamma, \delta]_{x,y,z}$  maksimalna v pasu  $L$  s spodnjo in zgornjo žarkovno višino  $\gamma$  in  $\delta$ .

Primerjajmo funkciji  $f_{1,\delta}(\beta)$  in  $f_{2,\delta}(\beta)$ .

**Trditev 2.18.** Če je  $\beta \in [0, 1]$  in  $\delta \geq \frac{4}{3}$ , potem je



Slika 2.9: Primer funkcij  $f_{1,\delta}(\beta)$  in  $f_{2,\delta}(\beta)$  in maksimalne celice  $C$  v tem primeru.

- $f_{1,\delta}(\beta) \leq f_{2,\delta}(\beta)$ , pri  $\beta \leq \frac{3\delta}{1+6\delta}$  in
- $f_{1,\delta}(\beta) \geq f_{2,\delta}(\beta)$ , pri  $\beta \geq \frac{3\delta}{1+6\delta}$ .

*Dokaz.* Izraz  $f_{1,\delta}(\beta) - f_{2,\delta}(\beta)$  je istega predznaka kot  $(1+3\delta) \cdot 3\delta \cdot (f_{1,\delta}(\beta) - f_{2,\delta}(\beta))$ . Računajmo

$$\begin{aligned}
 & (1+3\delta) \cdot 3\delta \cdot (f_{1,\delta}(\beta) - f_{2,\delta}(\beta)) = \\
 & = (1+3\delta)^2 \cdot \beta - (1+3\delta\beta) \cdot 3\delta = \\
 & = \beta \cdot (1+6\delta) - 3\delta,
 \end{aligned}$$

ki je večji kot nič natanko tedaj, ko je  $\beta \leq \frac{3\delta}{1+6\delta}$ . □

## 2.5 Zgornja meja

Naj bo  $\Pi$  osnova delne risbe polnega grafa. V naslednjem poglavju pokažemo, da je moč množice  $\Pi$  navzgor omejena. Torej, da ne obstajajo delne risbe polnih

grafov s poljubno velikimi števili točk. Brez škode za splošnost smemo za  $\Pi$  privzeti naslednje lastnosti.

**Lastnosti 2.19.**

- P1) premer množice točk  $\Pi$  je enak 1;*
- P2) točki  $a$  in  $b \in \Pi$ , ki sta v  $\Pi$  na maksimalni razdalji 1, imata koordinate  $(0, 0)$  in  $(1, 0)$ ;*
- P3) točka iz  $\Pi$ , ki je najbolj oddaljena od  $x$ -osi, ima pozitivno  $y$ -koordinato in jo označimo s  $c$  (če je kandidatov več, jo izberemo z največjo  $x$ -koordinato);*
- P4) točko iz  $\Pi$ , ki ima najmanjšo  $y$ -koordinato, označimo z  $d$  (če je kandidatov več, jo izberemo z največjo  $x$ -koordinato, možno je celo  $d = b$ ).*

**Definicija 2.20.** Okvir risbe  $F$  je najmanjši koordinatni pravokotnik, ki vsebuje vse točke iz  $\Pi$ . Njegova oglišča smo na Sliki 2.10 označili z  $\tilde{a}, \underline{a}, \tilde{b}, \underline{b}$ . Če s  $c_y$  in  $d_y$  označimo  $y$ -koordinati točk  $c$  in  $d$ , potem je

$$F = [0, 1] \times [d_y, c_y] = \square_{\underline{a}\tilde{b}\tilde{b}\tilde{a}}.$$

Poiskati bi želeli zgornjo mejo za moč osnove  $\Pi$ . V odvisnosti od relativne lege točk  $c$  in  $d$  glede na  $a, b$  bomo konstruirali pokritje  $\mathcal{C}$  okvirja  $F$  s končno družino večkotnikov  $P_1, P_2, \dots, P_k$ :

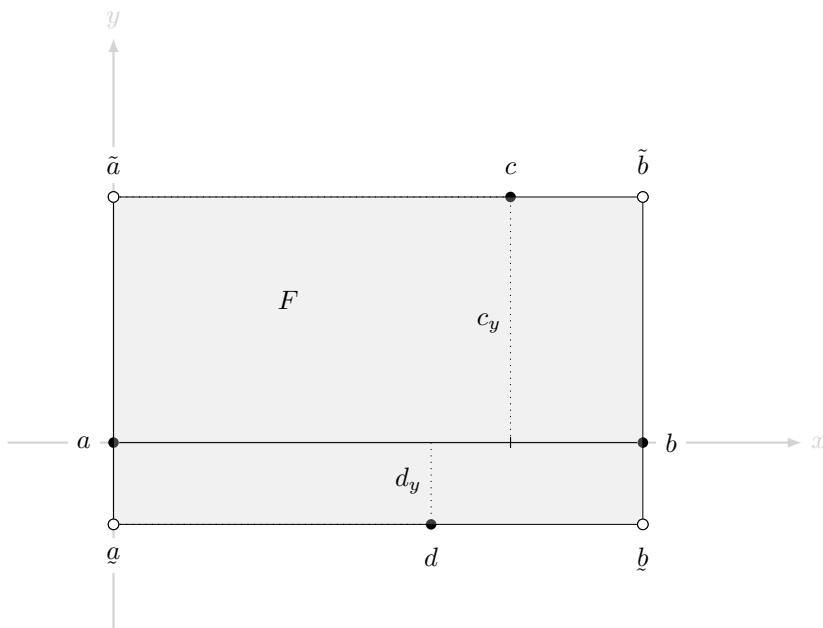
$$F \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k.$$

Oblike večkotnikov  $P_i$  in število večkotnikov  $k$  pokritja  $\mathcal{C}$  bodo odvisne od parametrov  $t$  in  $h$ :

$$t = c_x, \tag{2.10}$$

$$h = -\frac{d_y}{c_y}. \tag{2.11}$$

Pri tem s  $c_x$  označimo  $x$ -koordinato točke  $c$ . Točka  $c$  je lahko poljubno blizu  $\tilde{a}$  ali  $\tilde{b}$ , zato je  $t$  poljubno realno število iz intervala  $(0, 1)$ . Parameter  $h$  pa je poljubno realno število iz intervala  $[0, 1]$ .

Slika 2.10: Okvir  $F$ 

Nato bomo ocenili zgornjo mejo za število točk osnove delne risbe v posameznih večkotnikih. Ocenlo za zgornjo mejo števila točk osnove v večkotniku  $P_i$  označimo z  $m(P_i)$ , velja torej  $|\Pi \cap P_i| \leq m(P_i)$ . Zapis  $m(P_i) = m_0$  pomeni, da bomo uspeli pokazati, da lahko v večkotniku  $P_i$  leži največ  $m_0$  točk delne risbe. Ocenlo  $m(\mathcal{C}(t, h))$  zgornje meje števila točk delne risbe polnega grafa dobimo, če seštejemo ocene zgornjih mej  $m(P_i), i = 1, \dots, k(t, h)$ :

$$m(\mathcal{C}(t, h)) = m(P_1) + m(P_2) + \dots + m(P_{k(t, h)}). \quad (2.12)$$

S parametroma  $t$  in  $h$  se spreminja oblika in število  $k$  večkotnikov  $P_i$ . Za oceno moči osnove delne risbe polnega grafa moramo izračunati, pri katerem paru  $t$  in  $h$  je ocena (2.12) najslabša.

## 2.6 Stopničaste funkcije

Stopničasta funkcija  $k = k(t)$  je preslikava

$$k : [0, 1] \mapsto \mathbb{N},$$

ki je



- odsekoma konstantna in
- obstaja končna družina vrednosti parametra  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , pri katerih je lahko  $k$  nezvezna.

Dodatno,  $k = k(t)$  je *skočna stopničasta funkcija*, če ima v vsaki točki nezveznosti skok. To pomeni, če je

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} k(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_0^-} k(t),$$

potem je

$$k(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} k(t) \quad \text{ali} \quad k(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} k(t).$$

Stopničasta funkcija, ki ni skočna, ima v posamezni točki lahko vrednosti, ki se razlikujejo tako od leve kot od desne limite.

Za izračun maksimuma stopničaste funkcije potrebujemo natančne vrednosti točk nezveznosti. Za izračun maksimuma skočne stopničaste funkcije pa je dovolj poznati

- približne vrednosti točk nezveznosti  $(t_i)_i$  in
- naraščajoče zaporedje racionalnih števil, ki ga imenujemo *sistem varnostnih intervalov*:

$$q_0 < q_1 < \dots < q_r,$$

za katerega je pri vsakem  $i = 1, \dots, r$  izpolnjena vsebovanost

$$t_i \in (q_{i-1}, q_i).$$

Maksimum vrednosti skočne stopničaste funkcije  $k$  lahko določimo tako, da vrednosti  $k$  natančno izračunamo v vseh racionalnih številih  $q_i, i = 0, \dots, r$ .

Vsota stopničastih funkcij je očitno stopničasta, toda vsota skočnih stopničastih funkcij ni nujno skočno stopničasta. Če imata skočno stopničasti funkciji  $k_1$  in  $k_2$  različne točke nezveznosti, potem je tudi njuna vsota  $k_1 + k_2$  skočno stopničasta funkcija.

Ker bomo v praksi poznali samo približke točk nezveznosti  $k_1$  in  $k_2$ , bomo lahko skočnost vsote  $k_1 + k_2$  dokazali z njunima sistemoma varnostnih intervalov. Če poiščemo zaporedje racionalnih števil

$$q_0 < q_1 < \dots < q_r,$$

za katerega velja, da ima na vsakem od odprtih intervalov

$$(q_{i-1}, q_i), i = 1, \dots, r$$

največ ena od skočnih stopničastih funkcij  $k_1$  oziroma  $k_2$  skok, potem je tudi  $k_1 + k_2$  skočno stopničasta funkcija in njen maksimum lahko izračunamo z izračunom  $k_1(q_i) + k_2(q_i)$ , pri vseh  $i = 0, \dots, r$ .

V praksi bomo za nekatera od območij zgornjo mejo določili v odvisnosti od vrednosti parametra  $t$ . Za območje  $P$  je  $k_P(t)$  zgornja meja za število točk osnove v množici  $P$ ,  $|\Pi \cap P|$ . Za globalno oceno bi lahko za vsako območje  $P$  poiskali maksimum

$$m(P) = \max_t \{k_P(t)\},$$

toda boljše globalno oceno dobimo, če seštejemo funkcije  $k$  po posameznih območjih in uporabimo maksimum na tako dobljeni vsoti. Funkcije  $k = k_P(t)$  imajo za vrednosti naravna števila in samo končno mnogo nezveznosti.

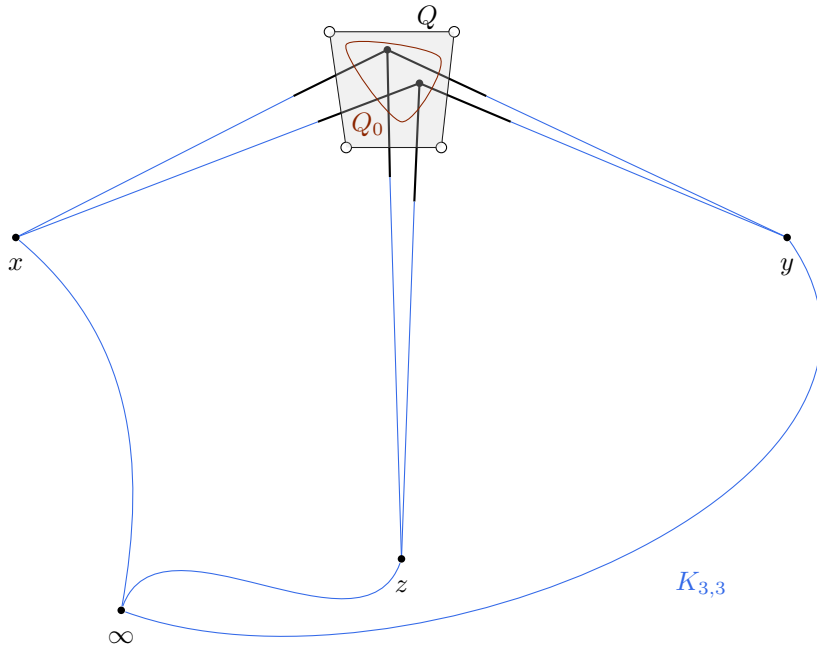
## 2.7 Presečišča

Sledita dva izreka o sekanju. V območju  $T_0$ , ki je definirano v žarkovnem trapezu ali v trikotniku, lahko z Izrekom 2.21 oziroma z Izrekom 2.22 učinkovito omejimo število točk osnove. Na tem mestu bralca spomnimo, da v skladu z Lemo 2.9 nobene tri točke iz  $\Pi$  niso kolinearne.

**Izrek 2.21.** *Naj bo  $\Pi$  osnova delne risbe polnega grafa in  $x, y, z \in \Pi$ . Naj bo  $Q$   $xyz$ -žarkovni trapez in  $Q_0 \subseteq Q$ . Če za vsako točko iz  $Q_0$  velja, da njeni  $x, y, z$  kazalčki po vrsti sekajo kraka in bazno osnovnico žarkovnega trapeza  $Q$ , potem za vsaki dve točki  $p_1, p_2$  iz  $Q_0$  velja*

$$Y_{p_1, x, y, z} \cap Y_{p_2, x, y, z} \neq \emptyset.$$

*Dokaz.* Recimo, da imamo v  $Q_0$  dve točki  $p_1$  in  $p_2$  iz osnove  $\Pi$ . Očitno  $x \notin Q_0$  in posledično  $x \neq p_1$  in  $x \neq p_2$ . Kazalčke  $\overline{p_i x}, \overline{p_i y}$  in  $\overline{p_i z}$ , za  $i = 1, 2$ , podaljšamo do daljic  $\overline{p_i x}, \overline{p_i y}$  in  $\overline{p_i z}$ . Izberemo si poljubno točko  $\infty$ , ki leži niže od točk  $x, y, z$  in jo povežemo s točkami  $x, y, z$  tako, da ne pridelamo dodatnih križišč,



Slika 2.11: Risba  $K_{3,3}$  ima križišče lahko le v trapezu  $Q$ .

glej Sliko 2.11. Pridelamo risbo grafa  $K_{3,3}$ , ki vsebuje vsaj eno križišče. Katero koli križišče je lahko vsebovano le v  $Q$ , zato je

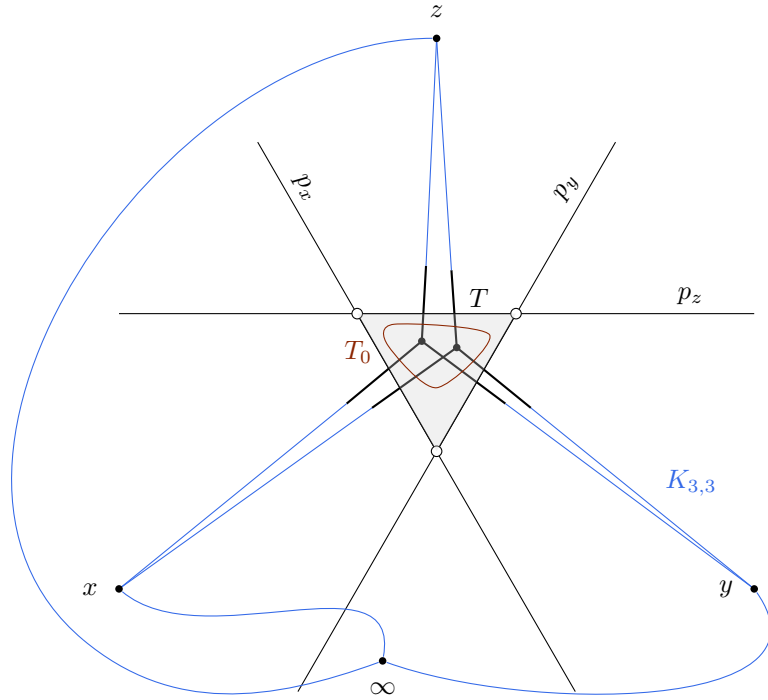
$$Y_{p_1,x,y,z} \cap Y_{p_2,x,y,z} \neq \emptyset.$$

□

Izrek 2.21 bomo tipično uporabljali z območjem  $Q_0 = Q$  ali pa bo  $Q_0$  žarkovni trapez z istima levo in desno mejo kot  $Q$ . Sledi še analogen izrek o območju znotraj trikotnika.

**Izrek 2.22.** *Naj bo  $\Pi$  osnova delne risbe polnega grafa in  $x, y, z \in \Pi$ . Premice  $p_x, p_y$  in  $p_z$  naj bodo po vrsti vzporedne daljicam  $\overline{yz}, \overline{xz}$  in  $\overline{xy}$ . Denimo, da za območje  $T_0 \subseteq T$  velja, da za vsako točko  $p \in T_0$  njeni  $x, y, z$  kazalčki  $\overline{px}, \overline{py}, \overline{pz}$  po vrsti sekajo stranice trikotnika  $T$ , ki po vrsti ležijo na nosilkah  $p_x, p_y, p_z$ . Potem za vsaki dve točki  $p_1, p_2 \in T_0$  velja*

$$Y_{p_1,x,y,z} \cap Y_{p_2,x,y,z} \neq \emptyset.$$



Slika 2.12: Risba  $K_{3,3}$  ima križišče lahko le v trikotniku  $T$ .

*Dokaz.* Recimo, da imamo v  $T_0$  dve točki  $p_1$  in  $p_2$  iz osnove  $\Pi$ . Kazalčke  $\overline{p_i x}, \overline{p_i y}$  in  $\overline{p_i z}$ , za  $i = 1, 2$ , podaljšamo do daljic  $\overline{p_i x}, \overline{p_i y}$  in  $\overline{p_i z}$ . Izberemo si poljubno točko  $\infty$ , ki leži niže od točk  $x, y, z$  in jo povežemo s točkami  $x, y, z$  tako, da ne pridemo dodatnih križišč, glej Sliko 2.12. Pridelamo risbo grafa  $K_{3,3}$ , ki vsebuje vsaj eno križišče. Katero koli križišče je lahko vsebovano le v  $T$ , zato je

$$Y_{p_1, x, y, z} \cap Y_{p_2, x, y, z} \neq \emptyset.$$

□

Za žarkovni trapez  $Q$ , ki ustreza Izreku 2.21, smo pokazali

$$m(Q) = 1.$$

Tudi za trikotnik  $T$ , ki ustreza Izreku 2.22, velja

$$m(T) = 1.$$

## 2.8 Transformacija

Pri oceni največjega števila točk delne risbe polnega grafa bo včasih ugodno uporabljati geometrijsko simetrijo. Ocenili bi, denimo, radi število točk iz  $\Pi$  v trikotniku  $\triangle abc$ . Če je trikotnik  $\triangle abc$  enakostraničen, bomo simetrijo s pridom uporabili. Tipično trikotnik  $\triangle abc$  ne bo takšne oblike, toda z uporabo ustrezne transformacije ga lahko pretvorimo v enakostraničnega. Transformacija ravnine je *afina*, če je kompozitum linearne transformacije in vzporednega premika.

**Izrek 2.23** (O transformaciji). *Naj bo  $\Phi$  obrnljiva afina transformacija ravnine. Potem je  $\Pi$  osnova delne risbe polnega grafa natanko takrat, ko je  $\Phi(\Pi)$  osnova delne risbe polnega grafa.*

*Dokaz.* Delna risba polnega grafa je unija daljic. Obrnljiva afina transformacija ravnine disjunktni daljici slika v disjunktni daljici. Če pa imata daljici  $\overline{ab}, \overline{ac}$  skupno krajišče  $a$ , potem imata njuni  $\Phi$ -sliki skupno krajišče  $\Phi(a)$ .  $\square$

Z uporabo izreka o transformaciji bomo lahko privzeli, da je, denimo, trikotnik  $\triangle abc$  enakostraničen ali pravokotnik  $\square ab\tilde{b}\tilde{a}$  kvadrat, seveda ne oboje hkrati.



# Poglavje 3

## Ocene

Za osnovo delne risbe  $\Pi$  privzamemo Lastnosti 2.19 in uporabljamo oznake točk v skladu z omenjenimi lastnostmi. Predstavimo izbrano delitev okvirja, ki je odvisna od položaja točk  $c$  in  $d$ . V preostanku poglavja za vsak člen delitve okvirja ocenimo zgornjo mejo za število točk iz osnove, ki jih lahko posamezni člen vsebuje. Iz vsote dobljenih ocen dobimo zgornjo mejo za število točk osnove delne risbe polnega grafa. Zapišimo naš glavni rezultat.

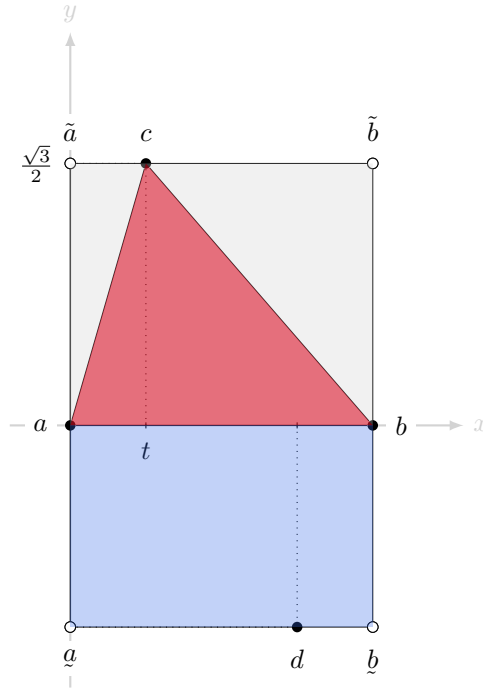
**Izrek 3.1.** *Največje možno število točk v osnovi delne risbe polnega grafa je 101. Simbolično, če je  $\Pi$  osnova delne risbe, potem je*

$$|\Pi| \leq 101. \quad (3.1)$$

### 3.1 Delitev okvirja

Za lažjo predstavitev lahko po Izreku 2.23 (O transformaciji) osnovo  $\Pi$  in s tem okvir  $F$  raztegnemo v smeri  $y$ -koordinate. Tako dosežemo, da bo  $y$ -koordinata točke  $c$  (to koordinato označimo s  $c_y$ ) enaka  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , glej Sliko 3.1. S tem spremenimo razdalje med točkami in razdalja med tako preslikanima točkama  $a$  in  $b$  ni več nujno največja. Ne spremenimo pa lastnosti nesekanja kazalčkov. V okvirju  $F$  definiramo naslednje večkotnike:

- 1) *osnovni trikotnik*  $\triangle abc$ ;
- 2) *levi in desni trikotnik*  $\triangle ac\tilde{a}$  in  $\triangle b\tilde{b}c$ ;



Slika 3.1: Delitev okvirja  $F$  na osnovni, levi in desni trikotnik ter spodnji štirikotnik.

3) *spodnji štirikotnik*  $\square_{abba}$ .

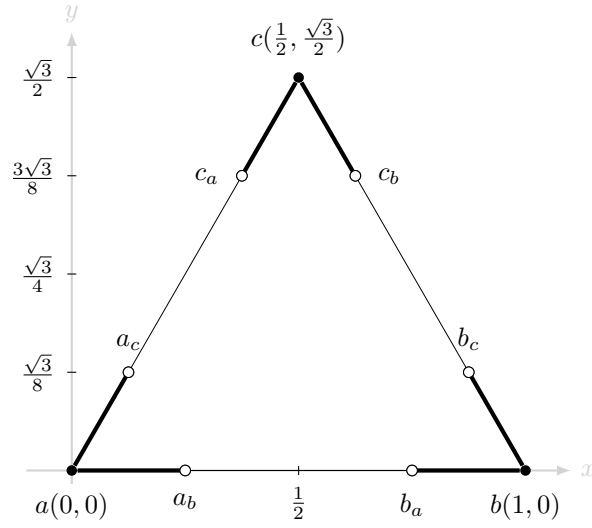
Na Sliki 3.1 smo narisali delitev okvirja  $F$ , kjer je  $t = c_x = \frac{1}{4}$  in  $d_y = -\frac{2}{3}$  (točki  $a$  in  $b$  sta na maksimalni razdalji v  $\Pi$ ). Oglišča okvirja  $F$  niso del množice  $\Pi$ , zato smo jih narisali z belimi krožci. Vse pomožne točke, ki niso nujno del množice  $\Pi$ , bomo v nadaljevanju risali z belimi krožci.

Oceno za osnovni trikotnik  $\triangle abc$  bomo najprej izdelali absolutno, v primeru, ko je  $h$  dovolj velik (točka  $d$  dovolj nizko), pa jo bomo izboljšali. Oceni števila točk osnove v levem in desnem trikotniku bosta odvisni od vrednosti parametra  $t$ . Spodnji štirikotnik pa bomo ugnali s hkratno uporabo parametrov  $t = c_x$  in  $h = -\frac{d_y}{c_y}$ . Začnemo z osnovnim trikotnikom  $\triangle abc$ .

## 3.2 Osnovni trikotnik

V tem razdelku želimo oceniti zgornjo mejo za moč osnove v osnovnem trikotniku  $|\Pi \cap \triangle abc|$ . Po Izreku 2.23 (O transformaciji) smemo privzeti, da je  $\triangle abc$





Slika 3.2: Osnovni trikotnik lahko transformiramo v enakostraničnega.

enakostraničen.

Za  $u, v \in \{a, b, c\}$ , kjer je  $u \neq v$ , definiramo točke  $u_v$  kot zaključke vseh kazalčkov med točkami  $a, b$  in  $c$ , glej Sliko 3.2.

Presečišča daljic  $\overline{a_b c_b}$ ,  $\overline{c_a b_a}$  in  $\overline{a_c b_c}$  po vrsti označimo z  $a', b', c'$  in z njimi definiramo *notranji trikotnik*  $\triangle a'b'c'$ , ki je predstavljen na Sliki 3.3a. S pomočjo središčne simetričnosti osnovnega trikotnika  $\triangle abc$  definiramo še dve skupini skladnih večkotnikov.

Presečišče daljic  $\overline{b_c a}$  in  $\overline{b_a c}$  s koordinatama  $(\frac{7}{10}, \frac{\sqrt{3}}{10})$  označimo z  $b^*$  in definiramo *vogalno območje* pri  $b$  kot štirikotnik

$$\diamond b_a b b_c b^*.$$

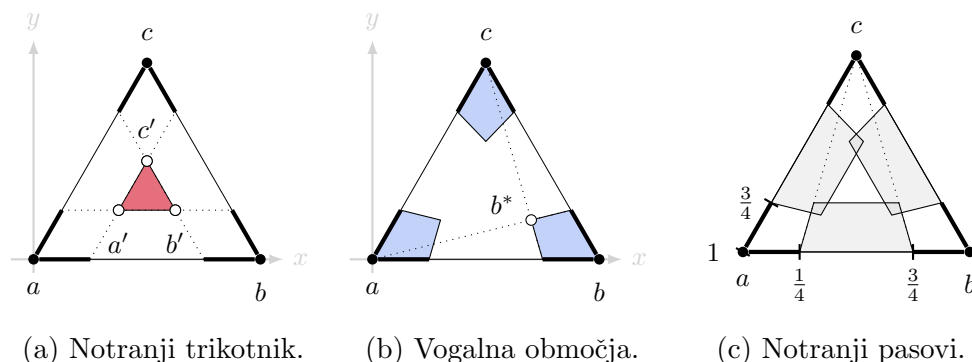
Simetrično definiramo vogalni območji pri  $a$  in  $c$ :

$$\diamond a a_b a^* a_c,$$

$$\diamond c c_a c^* c_b.$$

*Vogalna območja* so, ker je  $\triangle abc$  enakostraničen, deltoidi. Predstavljena so na Sliki 3.3b osenčeno.

Izberemo ŽKS glede na  $a, b, c$ . To pomeni, da je točka  $c$  izhodišče, poltrak iz



Slika 3.3: Večkotniki v osnovnem trikotniku.

$c$  skozi  $a$  pa žarkovna os. *Notranji pas* glede na  $a, b, c$  je žarkovni trapez:

$$\Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{a,b,c}.$$

Preostala dva notranja pasova sta določena z istimi žarkovnimi koordinatami glede na ustrezni permutaciji točk  $a, b, c$ :

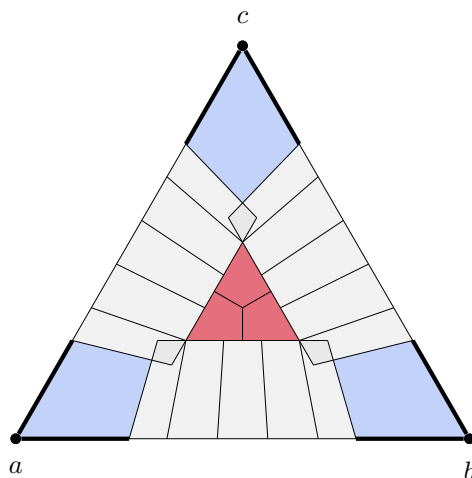
$$\Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{a,c,b},$$

$$\Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{b,c,a}.$$

*Notranji pasovi* na Sliki 3.3c so predstavljeni osenčeno. Opazimo, da se delno prekrivajo.

Notranji trikotnik in obe skupini skladnih večkotnikov tvorijo pokritje osnovnega trikotnika, glej Sliko 3.4. Za vsak deltoid (glej isto sliko) v notranjem trikotniku in za vsako celico v notranjih pasovih bomo pokazali, da vsebuje največ eno točko delne risbe. Za vsako vogalno območje bomo pokazali, da vsebuje največ 6 točk delne risbe. Oceni za število točk v vogalnih območjih, ki se dotikata točk  $a$  in  $b$ , bomo izboljšali z uporabo skrajno spodnje točke  $d$  v spodnjem štirikotniku  $\diamond abba$  okvirja  $F$ . Točke  $a, b, c$  obravnavamo ločeno. Delamo se, da ne pripadajo nobenemu območju ali celici, in njihovo prisotnost upoštevamo šele v samem zaključku ocene.

Z vsoto dobljenih ocen za člene pokritja osnovnega trikotnika  $\triangle abc$  bomo dobili oceno zgornje meje za število točk iz osnove v osnovnem trikotniku, ki bo

Slika 3.4: Pokritje osnovnega trikotnika  $\triangle abc$ .

odvisna od parametra  $h$  (lege točke  $d$ ). V nadaljevanju razkrijemo, zakaj smo izbrali tako pokritje osnovnega trikotnika in zakaj notranji pasovi niso disjunktni. Pri obravnavi obeh skupin večkotnikov opišemo in uporabimo ideje, ki jih kasneje razširimo in uporabimo na preostalih podmnožicah okvirja  $F$ .

### 3.2.1 Notranji trikotnik

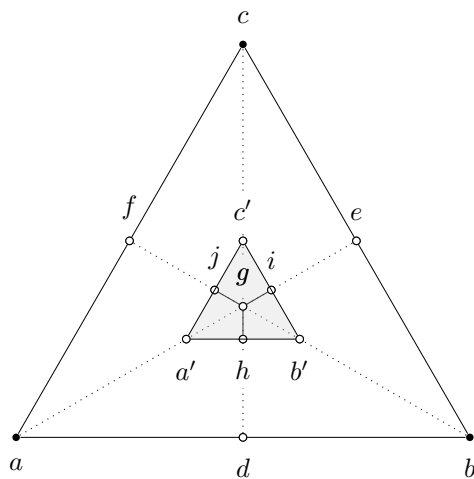
V osnovnem trikotniku  $\triangle abc$  razpolovišča stranic označimo z  $d, e, f$ , težišče trikotnika pa z  $g$ , glej Sliko 3.5. Točka  $g$  deli težiščnice v razmerju  $1 : 2$ , zato je  $y$ -koordinata točke  $g$  enaka tretjini  $y$ -koordinate točke  $c$ . Presečišča težiščnic s stranicami notranjega trikotnika  $\triangle a'b'c'$  označimo s  $h, i, j$ . Definirane točke razdelijo notranji trikotnik v tri skladne deltoide:

$$\diamond a'hgj, \quad \diamond hb'ig \quad \text{in} \quad \diamond gic'j.$$

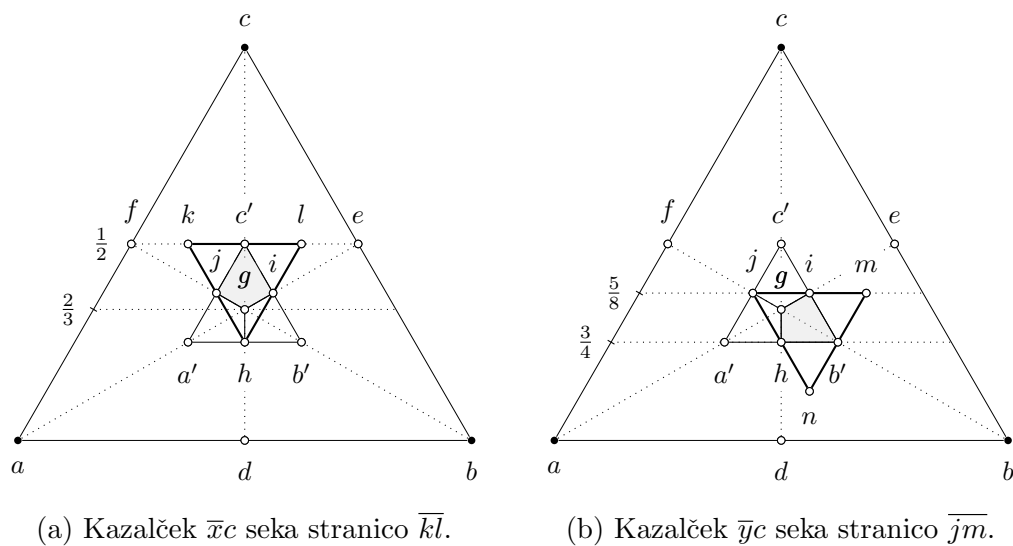
Zanje pokažemo, da vsak vsebuje kvečjemu eno točko iz množice  $\Pi$ . Od tod dobimo naslednjo oceno:

**Trditev 3.2.** *Notranji trikotnik  $\triangle a'b'c'$  vsebuje največ 3 točke. Simbolično*

$$m(\triangle a'b'c') = 3.$$



Slika 3.5: Notranji trikotnik razdelimo v tri skladne deltoide.



(a) Kazalček  $\bar{x}c$  seka stranico  $\overline{kl}$ .

(b) Kazalček  $\bar{y}c$  seka stranico  $\overline{jm}$ .

Slika 3.6: Za Trditev 3.2.

*Dokaz.* S  $T_0$  označimo enega izmed deltoidov

$$\diamond a'hgj, \quad \diamond hb'ig \quad \text{in} \quad \diamond gic'j.$$

Pokazati je potrebno naslednjo lastnost. Če je  $p \in T_0$ , potem njeni kazalčki  $\bar{p}a, \bar{p}b, \bar{p}c$  sekajo vse tri stranice trikotnika  $T$  (za osenčeni deltoid  $T_0$  na Slikah 3.6 je trikotnik  $T$  očrtan odebeljeno). Naj bo  $x$  poljubna točka iz deltoida

$$\diamond gic'j$$

in  $y$  poljubna točka iz deltoida

$$\diamond hb'ig.$$

Zaradi simetrije je dovolj pokazati, da kazalček  $\bar{x}c$  (Slika 3.6a) seka stranico  $\overline{kl}$  in kazalček  $\bar{y}c$  (Slika 3.6b) seka stranico  $\overline{jm}$ . Postavimo izhodišče žarkovnega koordinatnega sistema v točko  $c$  in naj žarkovna os poteka iz  $c$  v  $a$ . Točka  $g$  je na žarkovni višini  $\frac{2}{3}$  od točke  $c$ , točke  $a', h, b'$  so na višini  $\frac{3}{4}$ , točke  $k, c', l$  na  $\frac{1}{2}$  in točke  $j, i, m$  na  $\frac{5}{8}$ .

Višina točke  $x$  je na intervalu

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right],$$

in višina točke  $y$  na intervalu

$$\left[ \frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right].$$

Ker je

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2}$$

kazalček  $\bar{x}c$  seka  $\overline{kl}$  in ker je

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \leq \frac{5}{8}$$

kazalček  $\bar{y}c$  seka  $\overline{jm}$ .

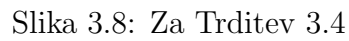
Izrek 2.22 z uporabo  $T_0 = \diamond gic'j$  in  $T = \triangle hlk$  trdi, da je  $|\Pi \cap T_0| \leq 1$ . Zato je z uporabo simetrije trditev dokazana.  $\square$

### 3.2.2 Vogalna območja

Naj bo

$$Q = \diamond b_a b b_c b^*,$$




$$\triangleleft p'ab \triangleright \triangleleft b_pab$$
$$\triangleleft p'cb \triangleright \triangleleft b_pcb.$$
$$\alpha' > \triangleleft b_p ab.$$

**Trditev 3.4.** *Naj bosta  $p, p' \in (\Pi \cap Q) \setminus \{b\}$ , zanju privzamemo, da velja vsebovanost (3.2) in*

*Potem velja*

$$\alpha' > \frac{7}{37} \cdot \alpha.$$

*Dokaz.* Označimo  $\hat{\alpha} = \angle b_p ab$ . Ocenjujemo kvocient  $\frac{\alpha'}{\alpha}$ . Ker je tangens na  $(0, \frac{\pi}{2})$  konveksna in naraščajoča funkcija, velja ocena

$$\frac{\alpha'}{\alpha} \geq \frac{\tan(\alpha')}{\tan(\alpha)} \geq \frac{\tan(\hat{\alpha})}{\tan(\alpha)} = 1 - \frac{3}{3 + p_x},$$

kjer je  $p_x$   $x$ -koordinata točke  $p$ . Slednja je navzdol omejena z  $x$ -koordinato točke  $b^*$ , ki je enaka  $\frac{7}{10}$ . Zato je

$$\frac{\alpha'}{\alpha} > 1 - \frac{3}{3 + \frac{7}{10}} = \frac{7}{37}$$

in trditev je pod streho. □

S pomočjo obeh trditev bomo uspeli oceniti največje možno število točk osnove  $\Pi$  v štirikotniku  $Q$ . Naj bo  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  po moči maksimalna množica točk v  $(\Pi \cap Q) \setminus \{b\}$ . Po Trditvi 3.3 smemo brez škode za splošnost privzeti

$$\angle ap_k c \subseteq \angle ap_{k-1} c \subseteq \dots \subseteq \angle ap_2 c \subseteq \angle ap_1 c$$

in po Trditvi 3.4 smemo privzeti

$$\angle b_{p_k} ab \leq \angle p_1 ab.$$

Definiramo kote  $\alpha_i = \angle bap_i$ , za  $i = 1, \dots, k$ . Zanje veljajo zveze

$$\alpha_i \geq \frac{4}{3} \cdot \alpha_{i-1}, \quad \text{za} \quad i = 2, \dots, k \quad (3.3)$$

in

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_k} > \frac{7}{37}. \quad (3.4)$$

Z induksijsko uporabo zgornjih zvez, pridelamo oceno

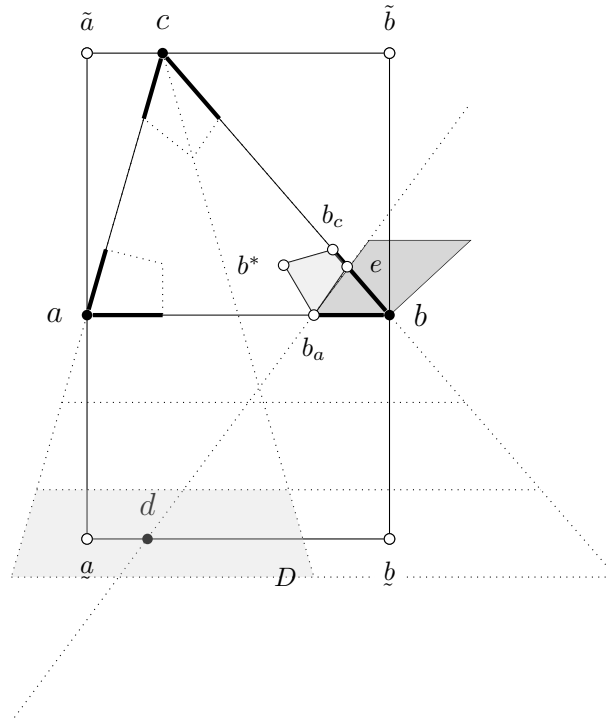
$$\alpha_1 \geq \frac{7}{37} \cdot \alpha_k \geq \frac{7}{37} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \alpha_1,$$

ki je izpolnjena za  $k \leq 6$ . Pridelamo naslednjo trditev.

**Trditev 3.5.** Če je  $\Pi$  osnova delne risbe in  $Q = \diamond b_a b b_c b^*$ , potem velja

$$|(\Pi \cap Q) \setminus \{b\}| \leq 6. \quad (3.5)$$





Slika 3.9: Senca  $S_{ba}$  v ŽKS glede na  $a, b, d$  je predstavljena kot temno sivo območje.

Oceno moči delne risbe v vogalnih območjih pri  $a$  in  $b$  lahko izboljšamo, če za robno točko  $d$  predpostavimo, da je *dovolj nizko* v spodnjem štirikotniku okvirja delne risbe. Za primer, ko za parameter  $h = -\frac{d_y}{c_y}$  velja

$$h \leq \frac{2}{3},$$

glej Sliko 3.9.

Če točka  $p \in \Pi \cap \triangle abc$  leži preblizu točk  $a$  oziroma  $b$ , njen kazalček  $\bar{p}d$  seka enega od kazalčkov  $\bar{a}b$  oziroma  $\bar{b}a$ . Senci

$$S_{\bar{a}b} = \triangleleft \left[ 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{4}{3} \right]_{a,b,d}$$

in

$$S_{\bar{b}a} = \triangleleft \left[ \frac{3}{4}, 1, 1, \frac{4}{3} \right]_{a,b,d}$$

sta odvisni od položaja točke  $d$ . Izboljšali bi radi oceno 3.5, ki sledi iz Trditve 3.4,

za število točk v vogalnem območju  $Q = \diamond bb_a b^* b_c$  in posledično tudi v območju  $\diamond aa_b a^* a_c$ . Ravnamo tako:

S transformacijo trikotnik  $\triangle abc$  preslikamo v enakostraničnega. Pokažemo, da je senca kazalčka  $\bar{ba}$  glede na  $d$  minimalna v natanko določeni legi točke  $d$ . V tej legi ocenimo maksimalno število točk osnove v  $\diamond bb_a b^* b_c$ . Ista ocena bo veljala tudi za  $quadsymaa_b a^* a_c$ . Senca  $S_{\bar{ba}}$  je žarkovni trapez v ŽKS glede na  $a, b, d$ . Višina njegove nebazne osnovnice je najmanjša v primeru  $h = \frac{2}{3}$  in njegov krak leži pod minimalnim kotom natanko tedaj, ko točka  $d$  leži na skrajnem levem robu okvirja. V primeru, ko je  $\triangle abc$  enakostraničen (je okvir paralelogram), je presek  $S_{\bar{ba}} \cap \triangle abc$  minimalen pri vrednosti parametra  $t = 0$ , glej Sliko 3.10. Znova s  $k$  označimo maksimalno število točk osnove v

$$(\Pi \cap \diamond bb_a b^* b_c) \setminus \{b\},$$

ki pa ne smejo ležati v senci  $S_{\bar{ba}}$ . Ponovno jih označimo s  $p_1, p_2, \dots, p_k$  in privzamemo gnezdenje.

**Trditev 3.6.** Štirikotnik  $\diamond bb_a b^* b_c \setminus \{b\}$  v primeru  $h \geq \frac{2}{3}$  vsebuje največ 4 točk osnove,

$$|(\Pi \cap \diamond bb_a b^* b_c) \setminus \{b\}| \leq 4.$$

*Dokaz.* Točka na presečišču simetrale kota  $\sphericalangle abc$  in stranice sence  $\overline{bae}$  ima koordinati največ  $(\frac{22}{25}, \frac{\sqrt{3}}{25})$  in jo označimo s  $p^*$ , glej Sliko 3.10. Velja

$$\sphericalangle p^* ab = \sphericalangle p^* cb = \arctan \frac{\sqrt{3}}{22}.$$

Za točko  $p_1$  velja

$$\sphericalangle p_1 ab \geq \sphericalangle p^* ab$$

ali

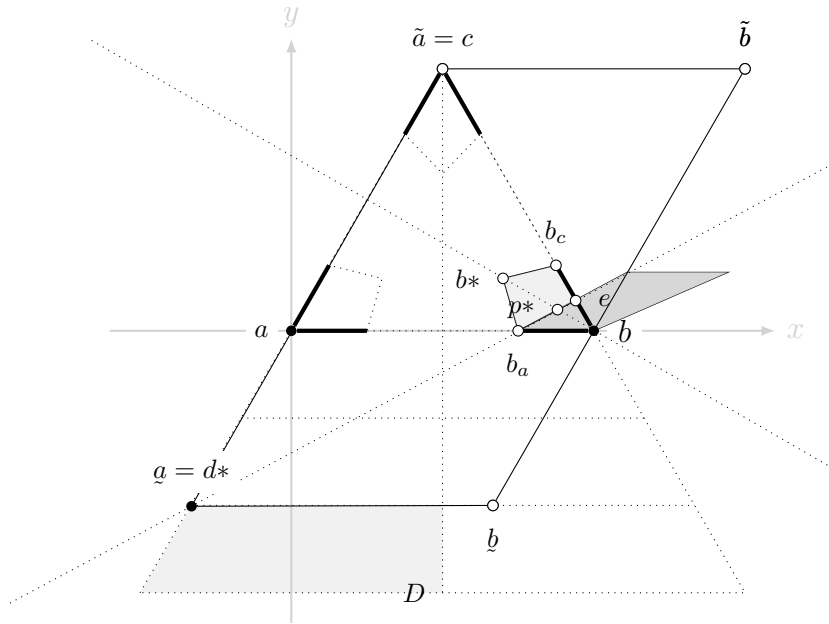
$$\sphericalangle p_1 cb \geq \sphericalangle p^* ab.$$

Brez škode za splošnost se odločimo za prvo možnost. Posledično je

$$\alpha_1 = \sphericalangle p_1 ab \geq \arctan \frac{\sqrt{3}}{22}.$$

Za točko  $p_k$  pa velja ocena

$$\alpha_k = \sphericalangle p_k ab \leq \arctan \frac{\sqrt{3}}{7}.$$



Slika 3.10: Presek  $S_{ba} \cap \triangle abc$  je minimalen pri vrednosti parametra  $t = 0$ .

Če upoštevamo še zveze 3.3

$$\alpha_i \geq \frac{4}{3} \cdot \alpha_{i-1}, \quad \text{za} \quad i = 2, \dots, k,$$

pridelamo oceno

$$\arctan \frac{\sqrt{3}}{7} \geq \alpha_k \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \cdot \alpha_1 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \cdot \arctan \frac{\sqrt{3}}{22},$$

ki je izpolnjena samo pri  $k \leq 4$ . □

Razdelek lahko sklenemo s kumulativno oceno za maksimalno število točk osnove v uniji vogalnih območij.

**Trditev 3.7.** *V vogalnih območjih je, če izločimo točke  $a, b, c$ , skupaj največ 18 točk osnove. Če pa je  $h \geq \frac{2}{3}$ , je v vogalnih območjih, če izločimo točke  $a, b, c$ , skupaj največ 14 točk osnove. Simbolično*

$$|(\Pi \cap (\diamond aa_b a^* a_c \cup \diamond bb_a b^* b_c \cup \diamond cc_a c^* c_b)) \setminus \{a, b, c\}| \leq \begin{cases} 14, & \text{če } h \geq \frac{2}{3}, \\ 18, & \text{če } h < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

### 3.2.3 Notranji pasovi

Za oceno števila točk osnove v notranjih pasovih je po simetriji dovolj obravnavati enega izmed njih.

**Trditev 3.8.** *Notranji pas vsebuje največ 5 točk osnove. Simbolično*

$$\left| \Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{a,b,c} \cap \Pi \right| \leq 5.$$

*Dokaz.* Pas bomo razbili na 5 celic  $C_i, i = 1, \dots, 5$ . Naj bodo  $\beta_i, i = 0, \dots, 5$  meje celic. Celica  $C_i$  ima levo mejo  $\beta_{i-1}$  in desno mejo  $\beta_i$ . Celice konstruiramo začeniši z leve. Prve štiri celice bodo maksimalne, peta celica pa ne:

$$\beta_0 = \frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = \min \left\{ f_{1,1} \left( \frac{1}{4} \right), f_{2,1} \left( \frac{1}{4} \right) \right\} = \frac{1}{3} \approx 0,33,$$

$$\beta_2 = \min \left\{ f_{1,1} \left( \frac{1}{3} \right), f_{2,1} \left( \frac{1}{3} \right) \right\} = \frac{4}{9} \approx 0,44,$$

$$\beta_3 = \min \left\{ f_{1,1} \left( \frac{4}{9} \right), f_{2,1} \left( \frac{4}{9} \right) \right\} = \frac{7}{12} \approx 0,58,$$

$$\beta_4 = \min \left\{ f_{1,1} \left( \frac{7}{12} \right), f_{2,1} \left( \frac{7}{12} \right) \right\} = \frac{11}{16} \approx 0,69 \quad \text{in}$$

$$\beta_5 = \frac{3}{4}.$$

Za konec je potrebno videti, da za vsako celico  $C_i, i = 1, \dots, 5$  velja

$$m(C_i) = 1.$$

Tukaj uporabimo Izrek 2.21 (O sekanju v trapezu) s  $Q = C_i$  in  $Q_0 = C_i$ . Izberemo poljubno točko  $p \in C_i$ . Po sami definiciji  $\bar{p}z$  seka bazno osnovnico trapeza  $C_i$ . Preveriti moramo, da kazalčka  $\bar{p}x$  in  $\bar{p}y$  sekata kraka trapeza  $C_i$ . Žarkovno višino točke  $p$  označimo s

$$\xi \in \left[ \frac{3}{4}, 1 \right].$$

Žarkovni višini zaključkov kazalčkov  $\bar{p}x$  in  $\bar{p}y$  sta enaki

$$\frac{1 + 3 \cdot \xi}{4} \in \left[ \frac{3}{4}, 1 \right].$$

Ker kazalček  $\bar{p}x$  seka  $\beta_{i-1}$ -žarek in kazalček  $\bar{p}y$  seka  $\beta_i$ -žarek, je trditev dokazana.

□

Razdelek lahko sklenemo s kumulativno oceno za maksimalno število točk osnove v uniji notranjih pasov.

**Trditev 3.9.** *V notranjih pasovih je skupaj največ 15 točk osnove. Simbolično*

$$\left| \Pi \cap \left( \Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{a,b,c} \cup \Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{a,c,b} \cup \Delta \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1 \right]_{b,c,a} \right) \right| \leq 15.$$

Strnimo vse ocene v notranjem trikotniku v izrek:

**Izrek 3.10.** *V notranjem trikotniku  $\triangle abc$  je, če izločimo točke  $a, b, c$ , skupaj največ 36 točk osnove. Če pa je  $h \geq \frac{2}{3}$ , je v notranjem trikotniku, če izločimo točke  $a, b, c$ , skupaj največ 32 točk osnove. Simbolično*

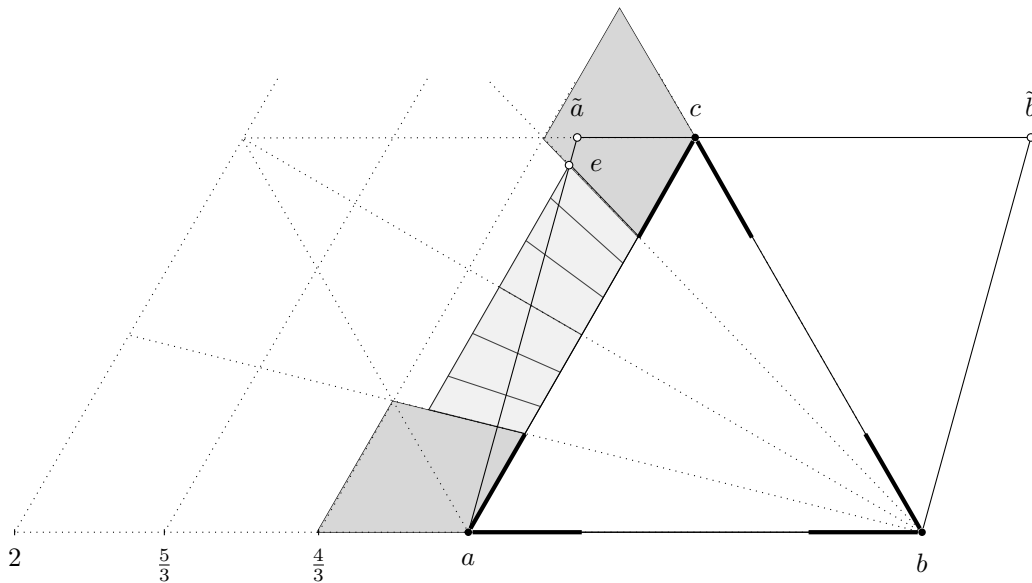
$$|(\Pi \cap \triangle abc) \setminus \{a, b, c\}| \leq \begin{cases} 32, & \text{če } h \geq \frac{2}{3}, \\ 36, & \text{če } h < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

*Dokaz.* Uporabimo Trditev 3.2, Trditev 3.7 in Trditev 3.9. □

### 3.3 Levi in desni trikotnik

Levi trikotnik  $\triangle ac\tilde{a}$  in desni trikotnik  $\triangle b\tilde{b}c$  sta odvisna od parametra  $t$ , ki predstavlja  $x$ -koordinato točke  $c$ . Izberimo fiksen  $t$ . Opazujemo lahko le levi trikotnik  $\triangle ac\tilde{a}$  pri vsaki izbiri parametra  $t$  iz intervala  $(0, 1)$ . Ustrezno sliko za desni trikotnik dobimo, če prostor prezrcalimo čez navpičnico daljice  $\overline{ab}$  pri parametru  $1 - t$ . Transformirajmo prostor tako, da osnovni trikotnik  $\triangle abc$  postane enakostraničen, glej Sliko 3.11. Po transformaciji je točka  $c$  fiksna in parameter  $t$  predstavlja razdaljo med ogliščem  $\tilde{a}$  in točko  $c$ . Žarkovna višina oglišča  $\tilde{a}$  je enaka  $1 + t$ . Izberemo ŽKS glede na točke  $a, c, b$ , torej izhodišče postavimo v točko  $b$  in žarkovna os poteka iz  $b$  v  $a$ .

Za vsako izbiro parametra  $t$  v sencah  $S_{\tilde{a}c}$  in  $S_{\tilde{c}a}$  razen točk  $a$  in  $c$  ne bo točk iz osnove. Maksimalno žarkovno višino točke v levem trikotniku  $\triangle ac\tilde{a}$ , ki ne leži v notranjosti sence  $S_{\tilde{c}a}$  (lahko je na robu sence), označimo z  $\delta_{max}$ . Na Sliki 3.11 smo z  $e$  označili točko z maksimalno višino  $\delta_{max}$  pri izbranem  $t = 0,24$ .

Slika 3.11: Prvi zgornji pas za  $t = 0,24$ .

Območje v levem trikotniku brez senc  $S_{ac}$ ,  $S_{ca}$  prekrijemo z največ tremi pasovi  $L_1, L_2, L_3$ . Definiramo jih kot žarkovne trapeze glede na  $a, c, b$ :

$$L_1 = \Delta[\alpha_1, \omega_1, \gamma_1, \delta_1]_{a,c,b},$$

$$L_2 = \Delta[\alpha_2, \omega_2, \gamma_2, \delta_2]_{a,c,b},$$

$$L_3 = \Delta[\alpha_3, \omega_3, \gamma_3, \delta_3]_{a,c,b}.$$

Definicije parametrov  $\alpha_i, \omega_i, \gamma_i, \delta_i, i = 1, 2, 3$ , za posamezni pas, v odvisnosti od vrednosti parametra  $t$ , so predstavljene v Tabeli 3.1. Iz Tabele je razvidno naslednje. Če je  $t \leq \frac{1}{3}$  je  $\delta_{max} \leq \frac{4}{3}$  in pravimo, da sta pasova  $L_2$  in  $L_3$  prazna. Pas  $L_1$  je vedno neprazen, ker vedno velja  $t > 0$  in zato  $\delta_{max} > 1$ . Pri  $t < \frac{1}{3}$ , prilagodimo zgornjo žarkovno višino pasu  $L_1$  tako, da je enaka  $\delta_{max}$ . Pas  $L_2$  je neprazen pri  $t > \frac{1}{3}$ . Pri  $t < \frac{2}{3}$ , prilagodimo zgornjo žarkovno višino pasu  $L_2$  tako, da je enaka  $\delta_{max}$ . Pas  $L_3$  je neprazen pri  $t > \frac{2}{3}$  in pri tem prilagodimo zgornjo žarkovno višino tega pasu tako, da je enaka  $\delta_{max}$ .

Za  $m = 1, 2, 3$ , označimo s  $k_{L_m} = k_{L_m}(t)$  funkcijo potrebnega števila celic, na katerega razbijemo pas  $L_m$ . Iz dokaza Trditve 3.8 sledi, da je v vsaki celici največ ena točka iz osnove. Zato je funkcija  $k_{L_m}(t)$  ocena za največje število točk

Tabela 3.1: Meje zgornjih pasov.

$t \in [0, \frac{1}{3}]$	$t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$		$t \in (\frac{2}{3}, 1]$		
$L_1$	$L_1$	$L_2$	$L_1$	$L_2$	$L_3$
$\alpha_1 = \frac{1}{4}$	$\alpha_1 = \frac{1}{4}$	$\alpha_2 = \frac{1}{4t}$	$\alpha_1 = \frac{1}{4}$	$\alpha_2 = \frac{1}{4t}$	$\alpha_3 = \frac{2}{5t}$
$\omega_1 = \frac{3}{4}$	$\omega_1 = \frac{3}{4}$	$\omega_2 = \frac{3}{4}$	$\omega_1 = \frac{3}{4}$	$\omega_2 = \frac{3}{4}$	$\omega_3 = \frac{3}{5}$
$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_2 = \frac{4}{3}$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_2 = \frac{4}{3}$	$\gamma_3 = \frac{5}{3}$
$\delta_1 = \frac{4}{4-3t}$	$\delta_1 = \frac{4}{3}$	$\delta_2 = 1 + t$	$\delta_1 = \frac{4}{3}$	$\delta_2 = \frac{5}{3}$	$\delta_3 = 1 + t$

iz osnove, ki ležijo v pasu  $L_m$ . Po definiciji pasu velja  $\gamma \geq \frac{3}{4}\delta$ , zato je  $k_{L_m}(t)$  neodvisna od parametra  $\gamma$ . Pri fiksnem  $t$ , pas  $L_m$ , če je  $L_m$  neprazen, razbijemo na kar se da majhno število celic. V takšnem razbitju smemo privzeti, da so vse celice, razen morda zadnje, maksimalne. Za razbitje na celice

$$C_1, C_2, \dots, C_k,$$

je potrebno določiti njihove žarkovne kote

$$\beta_0 = \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k = \omega.$$

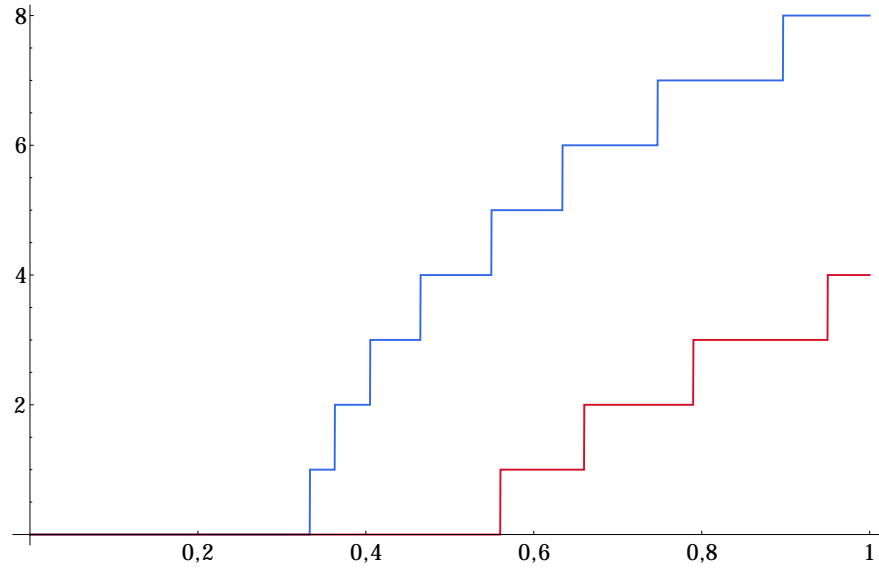
Pri tem za vsak  $i = 1, \dots, k$  velja

$$\beta_i = \min \{f_{1,\delta}(\beta_{i-1}), f_{2,\delta}(\beta_{i-1})\}.$$

Za izbrani  $t$ , potrebno število celic  $k_m$  v pasu  $L_m$  določimo tako, da po vrsti računamo žarkovne kote  $\beta_i$ . Ustavimo se pri tistem  $i = k - 1$ , kjer je

$$\min \{f_{1,\delta}(\beta_{k-1}), f_{2,\delta}(\beta_{k-1})\} \geq \omega.$$

Če so pri izbrani vrednosti  $t = t_0$  vse celice v pasu  $L_m$  maksimalne, pravimo, da je takšna vrednost parametra  $t$  *kritična*. Če ilustriramo, parameter  $t$  je kritičen takrat, ko z majhno spremembo parametra v ustrezno smer dosežemo, da se število celic v katerem od pasov spremeni za 1 oziroma ima stopničasta funkcija  $k_{L_m}$  pri  $t_0$  (morda) nezveznost.



Slika 3.12: Graf funkcije  $k_{L_2}(t)$  z modro barvo in graf funkcije  $j_{L_2}(t)$  z rdečo barvo v odvisnosti od  $t$ .

Za pas  $L_2$  je ocena za število točk  $k_{L_2} = k_{L_2}(t)$  skočna stopničasta funkcija s skoki pri približno

$$0,36, 0,41, 0,47, 0,55, 0,63, 0,75, 0,9.$$

Predstavljena je na Sliki 3.12 z modro barvo. Njen sistem varnostnih intervalov je določen z zaporedjem racionalnih števil

$$\frac{5}{14}, \frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{77}{103}, \frac{17}{19}, 1.$$

V nekem pasu z znano levo mejo maksimalne celice njeno desno mejo izračunamo bodisi z uporabo  $f_{1,\delta}$  bodisi z uporabo  $f_{2,\delta}$ . Po Trditvi 2.18, obstaja neki  $j \in \mathbb{Z}$ , za katerega veljata implikaciji

- če je  $i \leq j$ , je  $\beta_i = f_{1,\delta}(\beta_{i-1})$ ;
- če je  $i > j$ , je  $\beta_i = f_{2,\delta}(\beta_{i-1})$ .

Pri nekem  $t$  lahko pride do skoka v vrednostih  $j$ . To se zgodi samo v primeru, ko velja:

$$\beta_j = f_{1,\delta}(\beta_{j-1}) = f_{2,\delta}(\beta_{j-1}).$$



Za  $m = 1, 2, 3$  označimo z  $j_{L_m} = j_{L_m}(t)$  funkcijo, ki meri, kolikokrat moramo uporabiti  $f_{1,\delta}$  preden začnemo uporabljati  $f_{2,\delta}$  za izračun desne meje v pasu  $L_m$ . Tudi  $j_{L_m}$  je skočna stopničasta funkcija in njene nezveznosti označimo za kritične vrednosti parametra  $t$ . Pri teh vrednostih parametra  $t$  ima lahko funkcija  $k_{L_m}$  skok, ki pa je po velikosti omejen z 1.

Za pas  $L_2$  je  $j_{L_2} = j_{L_2}(t)$  skočna stopničasta funkcija, predstavljena na Sliki 3.12 z rdečo barvo.

V levem trikotniku število celic v pasovih monotonno narašča s  $t$ . Zato za  $m = 1, 2, 3$  funkcije  $j_{L_m}$  in  $k_{L_m}$  monotonno naraščajo s  $t$ . Približke za kritične vrednosti  $t$  lahko izračunamo numerično z bisekcijo. Izračun je priložen v Dodatku A.

Za  $m = 1, 2, 3$  v desnem trikotniku analogno definiramo pasove  $L'_m$  in funkcije  $k_{L'_m}, j_{L'_m}$ . Enostavno je videti, da sta parametra  $t$  in  $t' = 1 - t$  kritična ali podkritična hkrati. Kumulativno število celic v pasovih

$$L_1, L_2, L_3, L'_1, L'_2, L'_3,$$

predstavlja oceno za število točk osnove v levem in desnem trikotniku pri nekem  $t$ . Vsota

$$S_k(t) = k_{L_1}(t) + k_{L_2}(t) + k_{L_3}(t) + k_{L'_1}(t) + k_{L'_2}(t) + k_{L'_3}(t),$$

predstavlja oceno za število točk osnove v levem in desnem trikotniku v odvisnosti od  $t$ . Če želimo izračunati vsoto takšnih funkcij, je dovolj zagotoviti, da ima pri posamezni vrednosti  $t$  največ eden izmed členov vsote skok. Če uspemo približno izračunane kritične in podkritične vrednosti parametrov

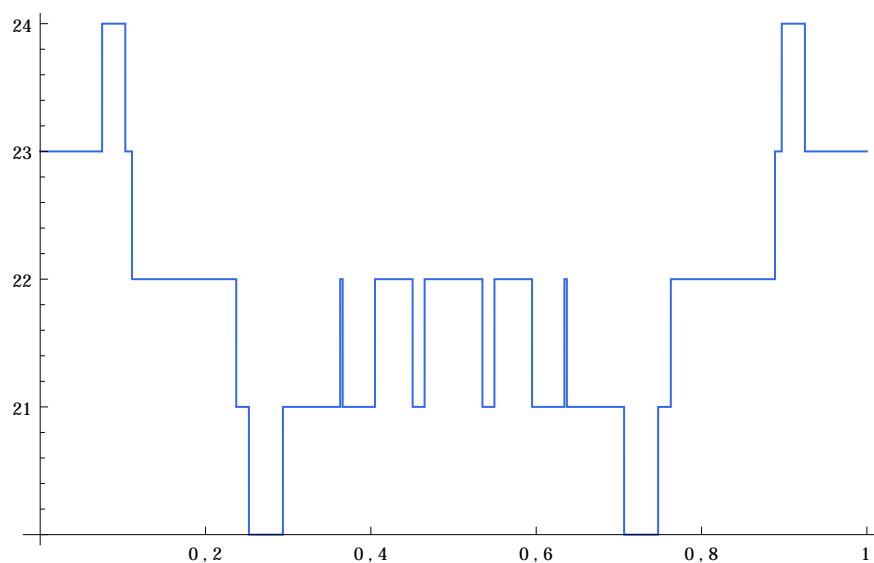
$$t_1 < t_2 < \dots < t_r$$

omejiti z racionalnimi števili

$$q_0 < q_1 < \dots < q_r,$$

za katera velja  $q_{i-1} < t_i < q_i$ , lahko ekstrem vsote teh stopničastih funkcij določimo tako, da takšno vsoto izračunamo za vse vrednosti  $q_i, i = 0, \dots, r$ . Na Sliki 3.13 je prikazan približen izračun vsote  $S_k(t)$ . Funkcija  $S_k(t)$  doseže maksimum pri

$$q_1 = \frac{1}{11}$$



Slika 3.13: Ocena za število točk osnove v levem in desnem trikotniku v odvisnosti od  $t$ .

in vsota funkcijskih vrednosti  $S_k(\frac{1}{11}) = 24$ . Vsota funkcij je simetrična funkcija, zato je tudi

$$S_k(\frac{10}{11}) = 24.$$

Ocena za zgornjo mejo števila točk iz osnove v uniji levega in desnega trikotnika je posledično enaka največji vrednosti funkcije  $S_k$ , oziroma  $S_k(\frac{1}{11}) = 24$ .

Natančno oceno za celoten okvir  $F$  bomo izdelali v naslednjem razdelku s pomočjo spodnjega dela okvirja  $\square abba$ . Če bi tako spodnji kot zgornji del okvirja ocenili z razbitjem na  $\triangle abc, \triangle abd$  in para levih in desnih trikotnikov, dobimo naslednjo suboptimalno oceno. V osnovnem trikotniku imamo največ 36 točk osnove. V uniji levega in desnega trikotnika pa največ 24 točk iz osnove. To pomeni, da je osnova delne risbe moči največ

$$2 \cdot 36 + 2 \cdot 24 + 4 = 124.$$

Pri tem člen 4 ustreza prispeveku robnih točk  $a, b, c, d$ .

### 3.4 Spodnji štirikotnik

Izberimo ŽKS glede na  $a, b, c$ . Spodnji štirikotnik  $\square aqbb$  brez senc  $S_{\bar{a}b}, S_{\bar{b}a}$  prekrijemo z največ tremi pasovi  $B_1, B_2, B_3$ . Definiramo jih kot žarkovne trapeze glede na  $a, b, c$ :

- $B_1$  z žarkovnima višinama  $1, \frac{4}{3}$ ;
- $B_2$  z žarkovnima višinama  $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ ;
- $B_3$  z žarkovnima višinama  $\frac{5}{3}, 2$ .

Pri tem se smemo omejiti na dva ločena primera. Če je parameter

$$h = -\frac{d_y}{c_y} > \frac{2}{3},$$

potem so vsi pasovi  $B_m, m = 1, 2, 3$ , neprazni. Zgornjo višino pasu  $B_3$  lahko brez škode postavimo na 2, saj z večjo višino pridelamo kvečjemu slabšo oceno. Če pa je  $h \leq \frac{2}{3}$ , je pas  $B_3$  prazen. Zgornjo višino pasu  $B_2$  pa iz istega razloga postavimo na  $\frac{5}{3}$ .

Oglejmo si ilustracijo pri zelo majhni vrednosti parametra  $t$  na Sliki 3.14. Točke iz območij  $P_1$  in  $P_2$  imajo zelo majhne žarkovne kote v ŽKS glede na  $a, b, c$ . Zato bi za razbitje takega pasu na celice potrebovali veliko število, četudi maksimalnih, celic. Problema se lotimo z ločeno obravnavo območij  $P_1$  in  $P_2$ , ki bo sorodna oceni za število točk v vogalnih območjih, ki smo jo izdelali v Trditvi 3.5.

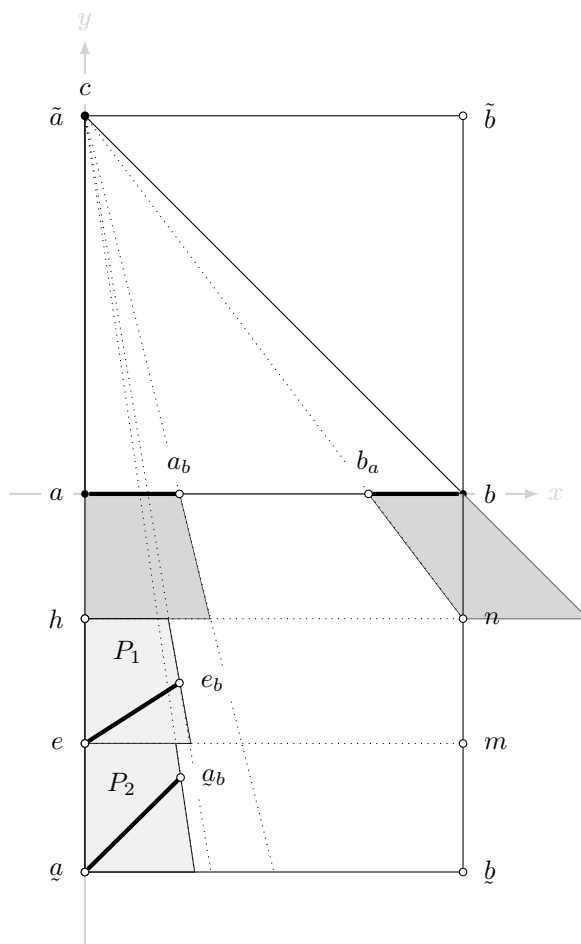
#### 3.4.1 Polsence

V ŽKS glede na  $a, b, c$  v spodnjem štirikotniku  $\diamond aqbb$  definiramo štiri območja posebne obravnave, ki jim pravimo *polsence*<sup>1</sup> in jih označimo s

$$P_1, P_2, P_3, P_4.$$

Njihova oblika je odvisna od parametra  $t$  (položaja točke  $c$ ). Ravno tako je možno, da je posamezna od polsenc prazna. Polsenci  $P_1$  in  $P_3$  ležita v pasu

<sup>1</sup>Termin smo si sposodili iz astronomije. Kot zanimivost, astronomska polsenca je območje na Zemlji v katerem vidimo delni Sončev mrk, senca pa območje popolnega Sončevega mrka.



Slika 3.14: Ilustracija pri zelo majhni vrednosti parametra  $t$ .

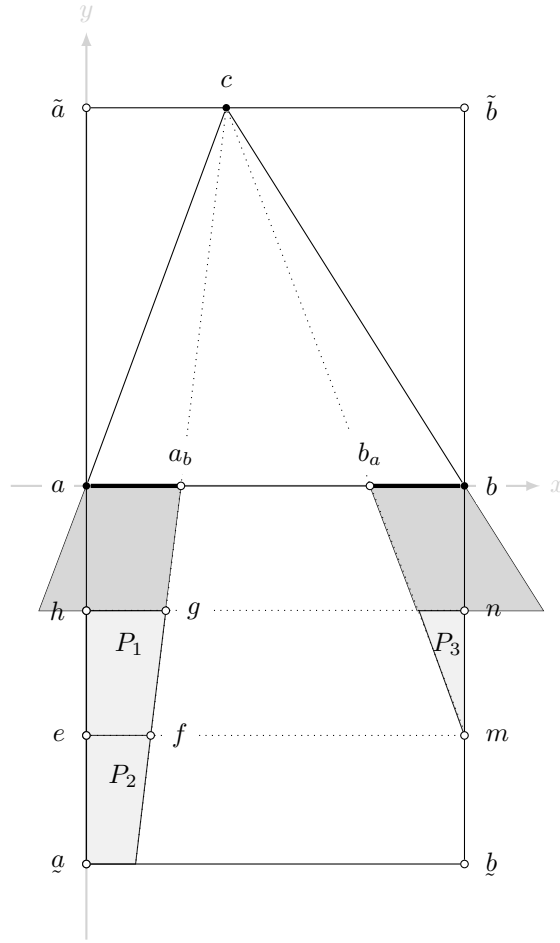
z žarkovnicima višinama med  $\frac{4}{3}$  in  $\frac{5}{3}$ , polsenca  $P_2$  in  $P_4$  pa v pasu z žarkovnicima višinama med  $\frac{5}{3}$  in 2, glej Sliko 3.15.

Polsenca  $P_1$  je prazna pri vrednosti parametra  $t \in (\frac{5}{8}, 1]$ . Za  $t \in [0, \frac{5}{8}]$  je polsenca  $P_1$  definirana kot presek okvirja  $F$  z žarkovnim trapezom

$$\Delta \left[ 0, \varphi, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right]_{a,b,c}.$$

Pri tem je za  $t \in [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$  vrednost parametra  $\varphi = \frac{1}{4}$ . Pri  $t \in [0, \frac{1}{4}]$  pa je  $\varphi$  skrajni žarkovni kot, pri katerem za vsako točko  $p \in P_1$  velja, da njen kazalček  $\bar{p}b$  seka  $\varphi$ -žarek. Iz Posledice 2.11 sledi, da lahko za  $\varphi$  izberemo žarkovni kot žarka iz  $c$  do zaključka  $e_b$ , glej Sliko 3.14.

Polsenca  $P_2$  je prazna pri vrednosti parametra  $t \in (\frac{3}{8}, 1]$ . Za  $t \in [0, \frac{3}{8}]$  je

Slika 3.15: Ilustracija pri vrednosti  $t = \frac{3}{8}$ .

polsenca  $P_2$  definirana kot presek okvirja  $F$  z žarkovnim trapezom

$$\Delta \left[ 0, \varphi, \frac{5}{3}, 2 \right]_{a,b,c}.$$

Pri tem je za  $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$  vrednost parametra  $\varphi = \frac{1}{4}$ . Pri  $t \in [0, \frac{1}{4}]$  pa je  $\varphi$  skrajni žarkovni kot, pri katerem za vsako točko  $p \in P_2$  velja, da njen kazalček  $\bar{p}b$  seka  $\varphi$ -žarek. Iz Posledice 2.11 sledi, da lahko za  $\varphi$  izberemo žarkovni kot žarka iz  $c$  do zaključka  $a_b$ , glej Sliko 3.14.

Polsenci  $P_3$  in  $P_4$  definiramo analogno kot  $P_1$  in  $P_2$  z izbiro parametra  $1 - t$  in kazalčka proti  $a$ . Opis polsenc strnemo v Tabeli 3.2.

Opazujmo polsenca  $P_1$  in izberimo poljubni točki  $p, p' \in P_1$ . Privzemimo še, da pripadata osnovi,  $p, p' \in \Pi$ . Za točko  $p$  njen kazalček  $\bar{p}b$  seka skrajni žarek

Tabela 3.2: Strnjen opis polsenc.

polsenca	$t \in$	od kod $\varphi$
$P_1$	$[0, \frac{1}{4}]$	$e_b$
$P_1$	$[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$	$a_b$
$P_2$	$[0, \frac{1}{4}]$	$\underline{a}_b$
$P_2$	$[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$	$a_b$
$P_3$	$[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$	$b_a$
$P_3$	$[\frac{3}{4}, 1]$	$m_a$
$P_4$	$[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$	$b_a$
$P_4$	$[\frac{3}{4}, 1]$	$\underline{b}_a$

območja  $P_1$  (premico skozi  $c$  in  $f$ ), kazalček  $\overline{p}c$  pa seka vzporednico daljici  $\overline{ab}$  na žarkovni višini  $\frac{5}{4}$ . Podobno velja za  $p'$ . To pomeni, da sta kota  $\angle cpb$  in  $\angle cp'b$  gnezdena in brez škode za splošnost privzamemo

$$\angle cp'b \subseteq \angle cpb.$$

Označimo oglišča polsence  $P_1$  po vrsti z  $e, f, g, h$ , glej Sliko 3.15. Naj bo  $r$  premica, ki gre skozi  $p$  in  $b$ . Ocenimo kvocient naslednjih dolžin. Dolžine daljice  $\overline{pb}$  in dolžine pravokotne projekcije daljice  $\overline{p'b}$  na premico  $r$ , ki jo označimo s  $|\text{proj}_r(\overline{p'b})|$ , in ga označimo s  $q_b(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{|pb|}{|\text{proj}_r(\overline{p'b})|} &\leq \frac{|eb|}{\min\{|\text{proj}_{\overline{fb}}(\overline{gb})|, |\text{proj}_{\overline{hb}}(\overline{gb})|\}} = q_b(t) = \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{13}}{3 \cdot \min\left\{\frac{|65-12t|}{24\sqrt{10}}, \frac{|451+8(1-2t)t|}{24\sqrt{545+8t(17+2t)}}\right\}}, & \text{če } t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{\sqrt{13}}{3 \cdot \min\left\{\frac{|7+3t|}{3\sqrt{10}}, \frac{|22+t(23+8t)|}{3\sqrt{113+16t(7+4t)}}\right\}}, & \text{če } t \geq \frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Izračun za izraz  $q_b$  v odvisnosti od  $t$  je dostopen v Dodatku A. Naj bo  $s$  premica, ki gre skozi  $p$  in  $c$ . Podobno s  $q_c$  označimo oceno za kvocient dolžine  $\overline{pc}$  in dolžine pravokotne projekcije daljice  $\overline{p'c}$  na  $s$ , ki jo označimo s  $|\text{proj}_s(\overline{p'c})|$ :

$$\begin{aligned} \frac{|pc|}{|\text{proj}_s(\overline{p'c})|} &\leq \frac{\max\{|ec|, |fc|\}}{\min\{|\text{proj}_{\overline{gc}}(\overline{hc})|, |\text{proj}_{\overline{hc}}(\overline{gc})|\}} = q_c(t) = \\ &= \begin{cases} \frac{\max\left\{\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{49}{576}(1-4t)^2}, \sqrt{\frac{25}{9} + t^2}\right\}}{\min\left\{\frac{128+15t(4t-1)}{24\sqrt{16+9t^2}}, \frac{128+15t(4t-1)}{3\sqrt{1049+200t(2t-1)}}\right\}}, & \text{če } t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{\max\left\{\frac{5}{3}\sqrt{1+\left(t-\frac{1}{4}\right)^2}, \sqrt{\frac{25}{9} + t^2}\right\}}{\min\left\{\frac{16+3t(4t-1)}{3\sqrt{16+9t^2}}, \frac{16+3t(4t-1)}{3\sqrt{17+8t(2t-1)}}\right\}}, & \text{če } t \geq \frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Tudi izračun za izraz  $q_c$  v odvisnosti od  $t$  je dostopen v Dodatku A. Z  $\ell$  označimo zaključek kazalčka  $\overline{pp'}$  in definiramo kote:

$$\beta' = \angle p b p', \hat{\beta} = \angle p b l,$$

$$\gamma' = \angle p c p', \hat{\gamma} = \angle p c l.$$

Zaradi gnezdenja velja vsaj ena od neenakosti

$$\beta' \geq \hat{\beta} \quad \text{ali} \quad \gamma' \geq \hat{\gamma}.$$

Ocenimo kvocient kotov  $\beta'$  in  $\hat{\beta}$  pri predpostavki, da je  $\beta' \geq \hat{\beta}$

$$\frac{\beta'}{\hat{\beta}} \leq \frac{\tan(\beta')}{\tan(\hat{\beta})} \leq 4 \cdot \frac{|pb|}{|\text{proj}_{\overline{pb}}(\overline{p'b})|} \leq 4 \cdot q_b(t). \quad (3.6)$$

Prva neenakost sledi zaradi konveksnosti in naraščanja funkcije tangens na  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Pri pogoju, da je  $\gamma' \geq \hat{\gamma}$  pa velja podobna zveza

$$\frac{\gamma'}{\hat{\gamma}} \leq 4 \cdot q_c(t). \quad (3.7)$$

Torej velja vsaj ena od ocen (3.6) oziroma (3.7).

Naj bo  $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$  maksimalna družina točk iz osnove  $\Pi$ , ki ležijo v  $P_1$ .

Pri tem lahko privzamemo gnezdenje:

$$\triangleleft cp_k b \subseteq \triangleleft cp_{k-1} b \subseteq \dots \subseteq \triangleleft cp_1 b \subseteq \triangleleft cp_0 b.$$

Za  $i = 1, \dots, k$  zapišemo

$$\beta_i = \triangleleft p_0 b p_i \text{ in } \gamma_i = \triangleleft p_0 c p_i.$$

Podobno kot v Trditvi 3.3 tudi za zaporedji  $(\beta_i)_i$  in  $(\gamma_i)_i, i = 1, \dots, k$  velja:

$$\beta_i \geq \frac{4}{3} \beta_{i-1} \quad \text{in} \quad \gamma_i \geq \frac{4}{3} \gamma_{i-1}.$$

Za točko  $p_1$  velja ena od zvez:

$$\triangleleft p_0 b p_1 \geq \triangleleft p_0 b (p_0)_{p_k} \quad \text{ali} \quad \triangleleft p_0 c p_1 \geq \triangleleft p_0 c (p_0)_{p_k}.$$

V prvem primeru pridelamo oceno

$$\beta_k \leq 4 \cdot q_b(t) \cdot \beta_1 \leq 4 \cdot q_b(t) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \beta_k,$$

ki je izpolnjena za  $k \leq 7$  pri  $t < t_0 \approx 0,4585$  in  $k \leq 6$  pri  $t \geq t_0$ . Za  $t > \frac{5}{8}$  je polsenca  $P_1$  prazna. V drugem primeru pa je

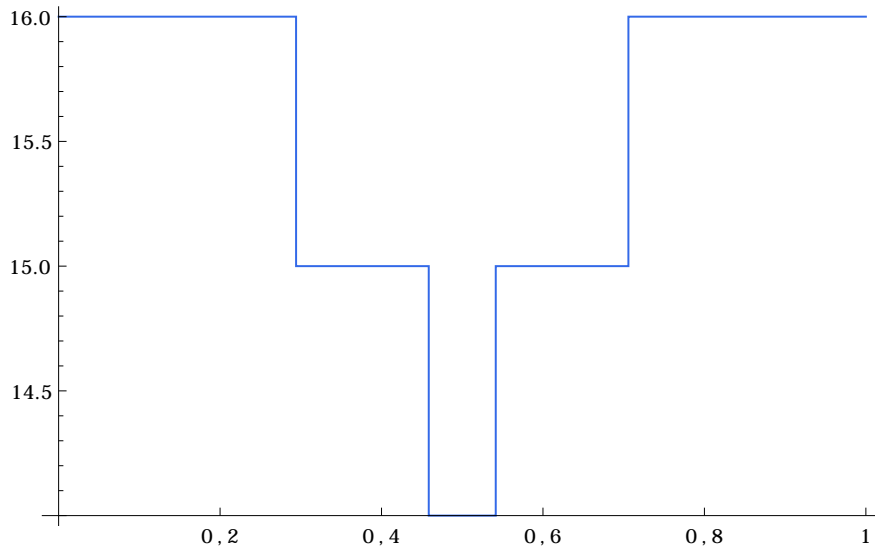
$$\gamma_k \leq 4 \cdot q_c(t) \cdot \gamma_1 \leq 4 \cdot q_c(t) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \gamma_k,$$

ki je izpolnjena za  $k \leq 6$  za vsak  $t$  iz intervala na katerem polsenca  $P_1$  ni prazna. Slabšo oceno dobimo v prvem od obeh primerov in strnemo v naslednjo trditev, pri tem pa upoštevamo tudi točko  $p_0$ .

**Trditev 3.11.** V polsenci  $P_1$  imamo največ 8 točk iz osnove pri  $t < t_0 \approx 0,4585$  in največ 7 pri  $t \geq t_0$ . Simbolično

$$|\Pi \cap P_1| \leq \begin{cases} 8, & \text{če } t < t_0 \approx 0,4585, \\ 7, & \text{če } t \geq t_0. \end{cases}$$





Slika 3.16: Ocena za število točk osnove v polsencah v odvisnosti od  $t$ .

Dobimo kritičen  $t$ , ki je točna vrednost, pri kateri ocena pade z 8 na 7 točk osnove, ki ga omejimo med dve racionalni števili. Analogno oceno izdelamo tudi za območje  $P_2$ , polsenci  $P_3, P_4$  pa uženemo z uporabo simetrije. Rezultate lahko strnemo v graf, ki prikazuje oceno za število točk osnove v polsencah v odvisnosti od parametra  $t$ .

### 3.4.2 Spodnji pasovi

Okvir znova transformirajmo tako, da osnovni trikotnik  $\triangle abc$  postane enakostraničen, in vpeljimo ŽKS glede na  $a, c, b$ . Predpostavimo, da je  $h > \frac{2}{3}$ . Spodnji štirikotnik  $\square aqbb$  brez senc  $S_{\bar{a}b}, S_{\bar{b}a}$  in brez polsenc  $P_1, P_2, P_3, P_4$  prekrijemo s spodnjimi pasovi  $B_1, B_2, B_3$ , glej Sliko 3.17. Definiramo jih kot žarkovne trapeze glede na  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= \triangle \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3} \right]_{a,b,c}, \\ B_2 &= \triangle \left[ \alpha_2, \omega_2, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right]_{a,c,b}, \\ B_3 &= \triangle \left[ \alpha_3, \omega_3, \frac{5}{3}, 2 \right]_{a,c,b}. \end{aligned}$$

Parametra  $\alpha$  in  $\omega$  v pasovih  $B_2$  in  $B_3$  sta odvisna od tega, na katerem podintervalu leži  $t$  in od tega, kdaj so polsence  $P_i, i = 1, \dots, 4$  prazne oziroma neprazne.

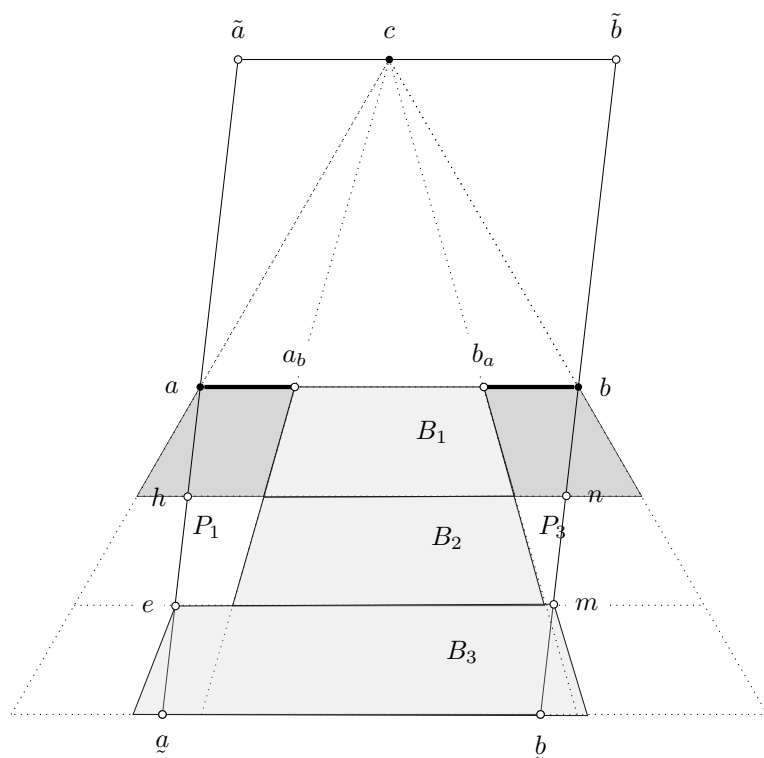
Slika 3.17: Spodnji pasovi pri  $t = 0,4$ .

Tabela 3.3: Leve in desne meje spodnjih pasov  $B_2, B_3$ .

pas	$t \in$	od kod $\alpha$	od kod $\omega$	$\alpha$	$\omega$
$B_2$	$(0, \frac{1}{4}]$	$e_b$	$\underline{b}\bar{b}$	$\frac{1+3t}{7}$	$\frac{3+2t}{5}$
$B_2$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$	$a_b$	$\underline{b}\bar{b}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3+2t}{5}$
$B_2$	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$	$a_b$	$b_a$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$B_3$	$(0, \frac{1}{4}]$	$\underline{a}b$	$\underline{b}\bar{b}$	$\frac{1+4t}{8}$	$\frac{1+t}{2}$
$B_3$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$	$a_b$	$\underline{b}\bar{b}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1+t}{2}$
$B_3$	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$	$\underline{a}\bar{a}$	$\underline{b}\bar{b}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{1+t}{2}$

Prvi spodnji pas  $B_1$  leži med sencama  $S_{\bar{a}b}, S_{\bar{b}a}$ . Po transformaciji, ki doseže enakostraničnost trikotnika  $\triangle abc$ , sta oblika in velikost pasu  $B_1$  neodvisni od  $t$ . Zato lahko, z uporabo Trditve 3.8, izpeljemo oceno

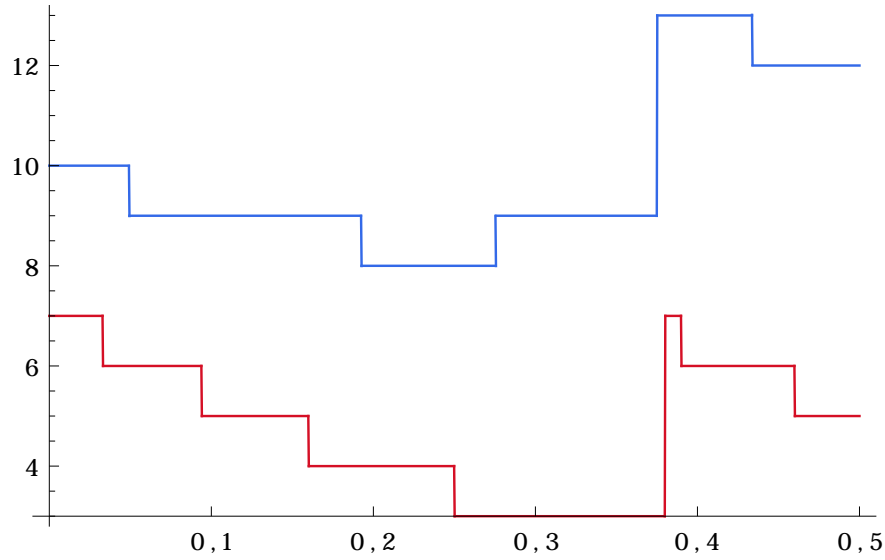
$$|B_1 \cap \Pi| \leq 7.$$

Pri preostalih dveh pasovih pa bosta leva in desna meja odvisni od  $t$ . Po simetriji lahko spodnje pasove obravnavamo le za  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ . Za  $t$ , pri katerem je polsenca  $P_1$  neprazna, bo leva meja pasu  $B_2$  desni krak polsence  $P_1$ , določen z zaključkom  $e_b$  ali z zaključkom  $a_b$ . Pri drugih  $t$  pa bosta meji določeni s stranicama  $\underline{a}\bar{a}, \underline{b}\bar{b}$  okvirja  $F$ . Podobno velja za spodnji pas  $B_3$ . Opis levih in desnih mej pasov  $B_2, B_3$  strnemo v Tabeli 3.3. V Tabeli smo našteali, od kod dobimo  $\alpha$  in  $\omega$  in kako sta odvisni od parametra  $t = c_y$ .

Naj bosta  $k_2$  in  $k_3$  oceni za zgornjo mejo števila točk iz osnove, ki se nahajajo v posameznem spodnjem pasu  $B_2$  in  $B_3$ . Za pasova  $B_2, B_3$  lahko pri fiksnem  $t$  izračunamo

$$k_{B_2}(t), j_{B_2}(t), k_{B_3}(t), j_{B_3}(t),$$

ki pa v splošnem niso več monotone funkcije. Zato moramo kritične vrednosti parametra  $t$  poiskati analitično. Za pas  $B_3$  smo na Sliki 3.18 narisali približno



Slika 3.18: Graf funkcije  $k_{B_3}(t)$  z modro barvo in graf funkcije  $j_{B_3}(t)$  z rdečo barvo v odvisnosti od  $t$ .

obnašanje funkcije  $k_{B_3}(t)$  z modro in  $j_{B_3}(t)$  z rdečo. Do večjega skoka za 4 navzgor pride zaradi drugačne definicije polsenc pri prehodu čez  $t = \frac{3}{8}$ .

Za posamezni pas  $B_m$ , za  $m = 2, 3$ , najprej poiščimo kritične  $t$ , pri katerih pride do skokov v vrednosti  $j_{B_m}(t)$ . Po Trditvi 2.18 velja

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{3\delta}{1+6\delta}, \\ \left(\frac{1+3\delta}{3\delta}\right)^i \beta_0 &= \frac{3\delta}{1+6\delta}, \\ \alpha(t) &= \frac{3\delta}{1+6\delta} \left(\frac{3\delta}{1+3\delta}\right)^i\end{aligned}$$

in vrednost parametra  $t$  lahko izračunamo kot inverzno vrednost linearne funkcije leve meje

$$t = \alpha^{-1} \left( \frac{(3\delta)^{i+1}}{(1+6\delta)(1+3\delta)^i} \right). \quad (3.8)$$

V pasu  $B_m$ ,  $m = 2, 3$  sosednji kritični vrednosti parametra  $t$ , ki ju izračunamo z (3.8), označimo s  $t_0$  in  $t_1$ . Na podintervalu

$$t \in (t_0, t_1)$$

je  $j_{B_m}$  konstanten. Višina pasu  $\delta$  je za posamezen pas konstantna, zato lahko izračunamo tudi vse kritične  $t$ , kjer se spreminja vrednost  $k_{B_m}(t)$ . Na vsakem podintervalu med sosednjima izračunanima  $t$  preverimo, ali pride do spremembe v številu celic  $k = k_{B_m}(t)$ . Tako kot v dokazu Trditve 3.8 lahko za neki fiksni  $t \in (t_0, t_1)$  izračunamo meje celic  $\beta_i, i = 1, \dots, k$  in določimo vrednost  $k_{B_m}(t)$ . Na podintervalu  $(t_0, t_1)$  do kritičnega  $t$  pride v dveh primerih. V prvem primeru, ko se zmanjša število celic v pasu. Takrat  $\beta_{k-1}(t)$  doseže  $\omega(t)$  in vrednost  $k_{B_m}(t)$  se zmanjša za 1. Zato da poiščemo kritični  $t$ , moramo rešiti enačbo

$$\beta_{k-1}(t) = \omega(t).$$

V drugem primeru pa, ko se poveča število celic v pasu. Takrat  $\omega(t)$  preseže  $\beta_k(t)$  in vrednost  $k_{B_m}(t)$  se poveča za 1. Zato da poiščemo kritični  $t$ , moramo rešiti enačbo

$$\omega(t) = \beta_k(t).$$

Natančneje sta v drugem primeru dve možnosti. Če velja

$$k - 1 > j_{B_m}(t) \quad \text{za} \quad t \in (t_0, t_1),$$

potem  $\beta_k(t)$  izračunamo z uporabo  $f_{1,\delta}$ , sicer pa z uporabo  $f_{2,\delta}$ . Funkciji leve in desne meje  $\alpha(t), \omega(t)$  sta linearni. Tudi funkciji  $f_{1,\delta}, f_{2,\delta}$  iz predpisa za  $\beta_i$  sta linearni. Zato je  $\beta_i$  linearna, ker je kompozitum  $i$  linearnih funkcij. Kritični  $t$  poiščemo tako, da poiščemo presečišče dveh linearnih funkcij na opazovanem podintervalu. Če presečišča na podintervalu ni, potem tam kritičnega  $t$  ni.



# Poglavje 4

## Zaključek

V Dodatku A je priložen izračun, s katerim pridemo do vseh kritičnih vrednosti parametra  $t$ . To so tiste vrednosti  $t$ , kjer ima katera od stopničastih funkcij, ki ocenjuje število celic v pasovih oziroma ocenjuje število točk osnove v polsencah, skok. Približki kritičnih vrednosti parametra  $t_r, r = 1, \dots, 43$  so:

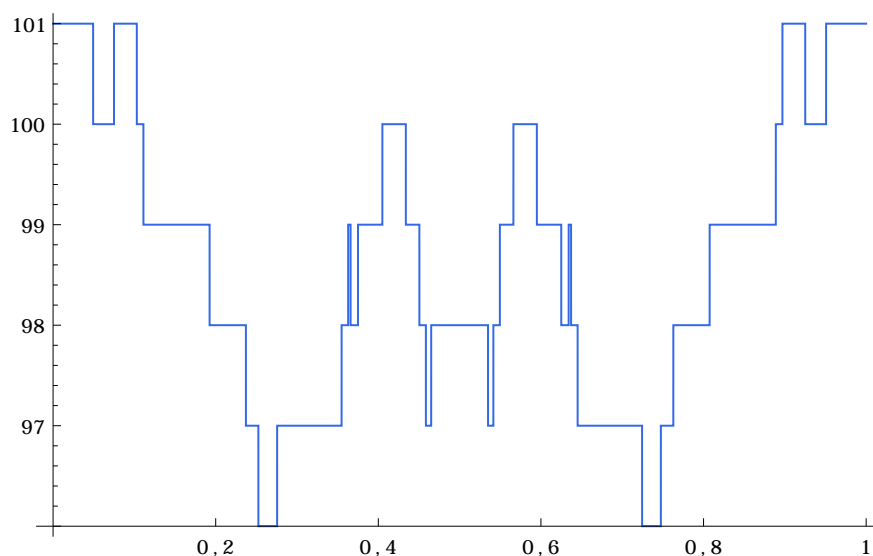
0,049, 0,075, 0,1, 0,11, 0,19, 0,24, 0,25, 0,25, 0,28, 0,29, 0,29,  
0,33, 0,35, 0,36, 0,37, 0,38, 0,40, 0,43, 0,45, 0,46, 0,47, 0,50,  
0,53, 0,54, 0,55, 0,57, 0,60, 0,63, 0,63, 0,64, 0,65, 0,67, 0,71,  
0,71, 0,72, 0,75, 0,75, 0,76, 0,81, 0,89, 0,90, 0,93, 0,95.

Če želimo izračunati vsoto vseh takšnih funkcij, je dovolj zagotoviti, da ima pri posamezni vrednosti  $t$  največ eden izmed členov vsote skok. Približno izračunane kritične vrednosti parametra  $t$  omejimo z racionalnimi števili  $q_r, r = 0, \dots, 43$ :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{40}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{11}, & \frac{2}{19}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{5}, & \frac{5}{21}, & \frac{26}{103}, & \frac{3}{11}, & \frac{2}{7}, & \frac{5}{17}, \\ \frac{3}{10}, & \frac{6}{17}, & \frac{5}{14}, & \frac{4}{11}, & \frac{7}{19}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{7}, & \frac{4}{9}, & \frac{5}{11}, & \frac{6}{13}, & \frac{7}{15}, \\ \frac{8}{15}, & \frac{7}{13}, & \frac{6}{11}, & \frac{5}{9}, & \frac{4}{7}, & \frac{3}{5}, & \frac{12}{19}, & \frac{7}{11}, & \frac{9}{14}, & \frac{11}{17}, & \frac{7}{10}, \\ \frac{12}{17}, & \frac{5}{7}, & \frac{8}{11}, & \frac{77}{103}, & \frac{16}{21}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{17}{19}, & \frac{9}{10}, & \frac{13}{14}, & \frac{20}{21}, \end{array}$$

pri čemer za vsak približek kritične vrednosti parametra  $t_i$  velja ocena

$$q_{i-1} < t_i < q_i.$$



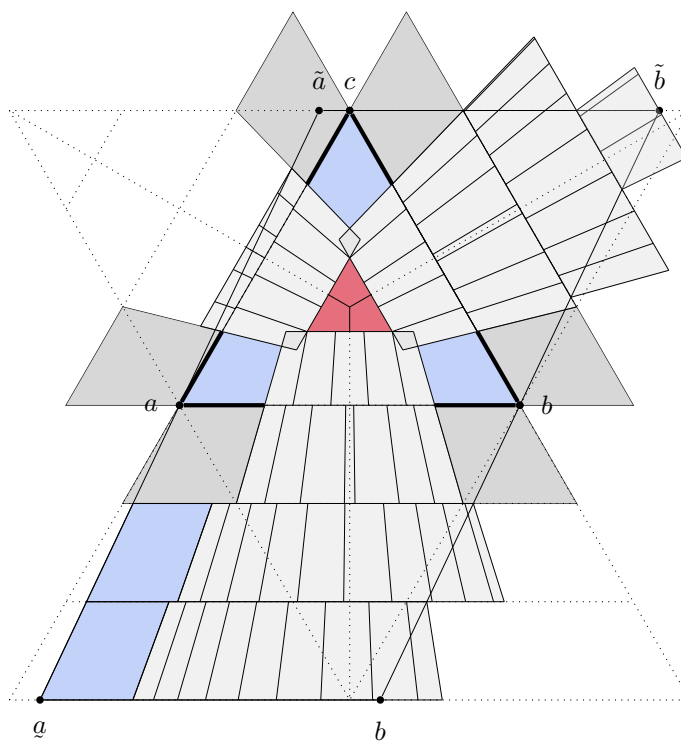
Slika 4.1: Graf funkcije ocene števila točk osnove pri  $h \geq \frac{2}{3}$ .

Vsoti stopničastih funkcij, ki ocenjuje število celic v pasovih oziroma ocenjuje število točk osnove v polsencah, smo prišteli oceno za število točk v osnovnem trikotniku, ko je  $h \geq \frac{2}{3}$ , glej Sliko 4.1. Ekstrem te funkcije določimo tako, da takšno vsoto izračunamo za vse vrednosti  $q_r, r = 1, \dots, 44$ . Dobimo vrednost 101 in naš glavni rezultat, ki ga povzame Izrek 3.1. Če pa je  $h \leq \frac{2}{3}$ , dobimo oceno 91. Funkcija, ki jo dobimo v tem primeru, je na Sliki 4.4.

Na Sliki 4.2 smo narisali delitev okvirja pri eni od kritičnih vrednosti  $t = \frac{1}{11}$  in  $h \geq \frac{2}{3}$ , kjer dobimo oceno 101. Na Sliki 4.3a smo narisali isto delitev okvirja brez uporabe transformacije pri isti vrednosti  $t$ . Na Sliki 4.3b smo označili vsako območje delitve z največjim številom točk, ki ga lahko vsebuje posamezno območje.

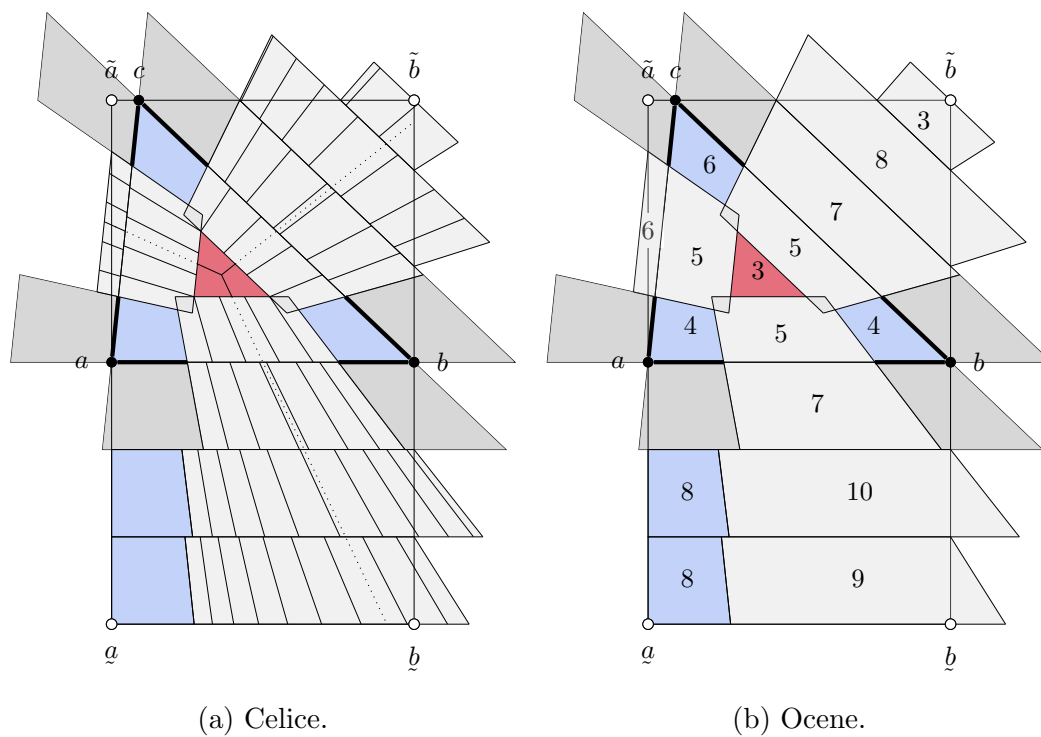
S sorodnimi metodami in natančnejšo analizo ocen v vogalnem območju bi znali našo zgornjo mejo spustiti še za 1, 2, morda 3. Zdi se tudi, da bi vsaka dodatna izboljšava potrebovala več dodatnih strani besedila v primerjavi s pridelanim padcem ocene. Ocena 101 je psihološka meja. Ker kaže, da z vsako izboljšavo ne pridelamo dovolj velikih padcev ocene, smo z razvitimi orodji prišli skoraj do konca. Torej za kaj več potrebujemo nove metode. Verjamemo, da je prava številka za velikost polnega grafa, ki dopušča delno risbo, precej bližje 16 kot 101.



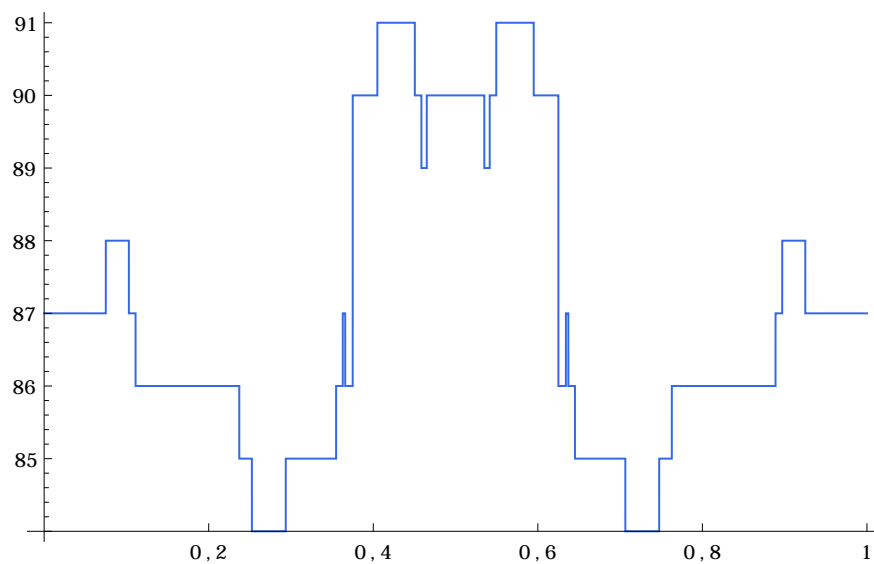


Slika 4.2: Transformirana delitev okvirja pri  $t = \frac{1}{11}$  in  $h \geq \frac{2}{3}$ .

Razvijali smo tudi idejo, da bi vse pasove narezali v fine, gostejše mreže. Tako dobimo primere problemov, ki jim rečemo *problemi maksimalne neodvisne množice*. Moralo bi delovati, vendar imamo nekaj zadržkov. Meje celic so izbrane na tesen način v vsakem od pasov. Ko postavimo preko tega gostejšo mrežo, izgubimo na tesnosti in morda se meja še poveča. Nimamo lepega, enostavnega in učinkovitega razloga, ki bi potiskal točke narazen, namesto da jim je omogočen premik. Na primer točke v desnem trikotniku se lahko zgostijo proti točki  $a$ . Za fiksno vrednost parametra  $t$  bi lahko povezali med seboj nezasedene celice. Težko pa si predstavljamo enoten pristop, ki bi deloval za vse možne  $t$ .



Slika 4.3: Delitev okvirja pri  $t = \frac{1}{11}$  in  $h \geq \frac{2}{3}$ .



Slika 4.4: Graf funkcije ocene števila točk osnove pri  $h < \frac{2}{3}$ .

# Dodatek A

## Izvorna koda

Sledijo pomembnejši moduli v jeziku Mathematica v katerih smo sprogramirali izračun kritičnih vrednosti parametra  $t$ . Na koncu je primer uporabe modulov.

### A.1 Pomembnejši moduli

```
cellsFromLeft :: usage=" cellsFromLeft [l0_ , r0_ , h0_ , q0_]
computes the minimum number of cells in a layer ,
such that the last one is suboptimal." ;
cellsFromLeft [l0_ , r0_ , h0_ , q0_] := Module [
  {lf , l=l0 , r=r0 , h=h0 , q=q0 , f1 , f2 , alist } ,
  f1 [x_] := q*x ; f2 [x_] := h-(h-x)/q ;
  alist = {1} ; (*there will always be at least one cell*)
  While [ ( l=f1 [1]) < h/2 , AppendTo [ alist , l ] ] ;
  lf = Last [ alist ] ; (*boundary just before the middle*)
  l = Min [ f1 [ lf ] , f2 [ lf ] ] ; (*boundary just after the middle*)
  If [ l < r0 , AppendTo [ alist , l ] ] ;
  (*otherwise it will only be a single cell*)
  While [ ( l=f2 [1]) < r0 , AppendTo [ alist , l ] ] ;
  Length [ alist ]]
```

```
findSubcritTs :: usage=" findSubcritTs [t00_ , t01_ , fj_ , l0_ , h0_ , q0_]
returns a list of subcritical t's , that is where the definition
of L(t) is changing" ;
findSubcritTs [t00_ , t01_ , fj_ , l0_ , h0_ , q0_] := Module [
  {h = h0 , q = q0 , numOfSubcritTs , max , min , t0=t00 , t1=t01 , l0Inv } ,
```

```

max=fj [ t0 ]; min=fj [ t1 ];
numOfSubcritTs=max-min;
If [numOfSubcritTs>0,
  Sort [ Union [
    10Inv [ y_]:=InverseFunction [ 10 ] [ y ];
    Map [ 10Inv [ h/(q^(max-#)*(q+1))] & , Range [ 0 ,
      numOfSubcritTs-1 ] ] ,
    { t0 , t1 } ] ] ,
    { t0 , t1 } ] ]

```

```

findCritTsFromFunctions :: usage=
"findCritTsFromFunctions[subIntBLX_, h0_] process the layers
on the observed subinterval between a pair of adjacent critical
t's sct0 and sct1 where fj has jump discontinuities. There we
know that fj is constant fj(t) = fj((sct0+sct1)/2) =: f0, for
every t on the subinterval (sct0, sct1). We can also compute
fk[sct0] =: k0. Thus, we have L_{k-1} uniquely defined.
We are interested in whether there is a critical t on the
observed subinterval where fk has jump discontinuities.
The rest of the story is kept in the comments.";
findCritTsFromFunctions[subIntBLX_, h0_] := Module [
  {subIntBL = subIntBLX, h = h0, q, f1, f2, lkMinOne,
   fk, fj, t0, t1, p, max, min, numOfSubcritTs, subcritTs,
   L0Inv, i, j, l0, r0, k0, j0, sct0, sct1, critTsList, t, ct},
  critTsList = {};
  h = h0;
  q = (1+3(h+1/3))/(3(h+1/3));
  f1 [ x_ ] := q*x; f2 [ x_ ] := h-(h-x)/q;
  lkMinOne [ t_ , k0_ , j0_ ] := Nest [ f2 , Nest [ f1 , l0 [ t ] , j0 + 1 ] , k0-j0-2 ];
  For [ i=1, i<=Length [ subIntBL ] , i++,
    p=Part [ subIntBL , i ];
    t0=Part [ p , 1 ]; t1=Part [ p , 2 ];
    l0 [ t_ ] := Part [ p , 3 ] [ t , h ];
    r0 [ t_ ] := Part [ p , 4 ] [ t , h ];
    fk [ t_ ] := cellsFromLeft [ l0 [ t ] , r0 [ t ] , h , q ];
    fj [ t_ ] := Floor [ Log [ h/(l0 [ t ]*(q+1)) ] / Log [ q ] ];
    subcritTs = findSubcritTs [ t0 , t1 , fj , l0 , h , q ];
    For [ j=1, j<Length [ subcritTs ] , j++,
  (* Critical t exists and fk(t) decreases for one,
  if L_{k-1} reaches R_{0} or critical t exists and fk(t)

```

```

increases for one, if  $R_{\{0\}}$  surpasses  $L_{\{k\}}$ .
In the second case there are two possibilities,
if  $k-1 > j_0$  we are using second definition for  $L_{\{k\}}$ 
and have to check if  $R_{\{0\}} > f_{\{2\}}(L_{\{k-1\}})$ ,
otherwise we have to check if
 $R_{\{0\}} > f_{\{1\}}(L_{\{k-1\}}).$ *)
    sct0=Part[subcritTs,j];
    sct1=Part[subcritTs,j+1];
    k0=fk[sct0];
    j0=fj[(sct0+sct1)/2];
(* $L_{\{0\}}$ ,  $f_{\{1\}}$ ,  $f_{\{2\}}$  and  $R_{\{0\}}$  are linear functions.
 $L_{\{k\}}$  is the composition of  $k$  linear functions, so it
is also a linear function for every fixed  $k$ . For all
the described cases we have to find the intersection
of two lines. First we check whether the two lines are
parallel. If not, we can check for intersection. Finally
we check if this happens on the observed subinterval.*)
    If[(D[lkMinOne[t,k0,j0],t]/.t->t0)
!= (D[r0[t],t]/.t->t0),
    ct=Solve[lkMinOne[t,k0,j0]==r0[t],t];
    ct = t /. ct[[1]];
    If[sct0<ct&&ct<sct1,AppendTo[critTsList,ct]]
](*Derivative[lkM] > 0?*)
If[k0-1>j0,
    If[(D[f2[lkMinOne[t,k0,j0]],t]/.t->t0)!=
    (D[r0[t],t]/.t->t0),
    ct=Solve[f2[lkMinOne[t,k0,j0]]
==r0[t],t];
    ct = t /. ct[[1]];
    If[sct0<ct&&ct<sct1,
    AppendTo[critTsList,ct]],
    If[(D[f1[lkMinOne[t,k0,j0]],t]/.t->t0)
!= (D[r0[t],t]/.t->t0),
    ct=Solve[f1[lkMinOne[t,k0,j0]]
==r0[t],t];
    ct = t /. ct[[1]];
    If[sct0<ct&&ct<sct1,
    AppendTo[critTsList,ct]]
];
];
];

```

```

];
(*If on the observed subinterval L_{k-1} does not intersect R_{0}
and also R_{0} does not intersect L_{k}, that means, there are no
critical t's on the observed subinterval.*);
];
critTsList]

```

```

findCritTsBottomLayers [] := Module [
  {bndStubL, bndStubR, bndFrameL, bndFrameR,
   bndRayL, bndRayR, subIntBL2, subIntBL3, t, h},
  bndStubL[t_, h_] := (h(1+(-2+3 h) t))/(2+3 h);
  bndStubR[t_, h_] := h - bndStubL[1 - t, h];
  bndFrameL[t_, h_] := (h-1)*t;
  bndFrameR[t_, h_] := h - bndFrameL[1-t, h];
  bndRayL[t_, h_] := h/4;
  bndRayR[t_, h_] := (3*h)/4;
  subIntBL2 := {
    {0, 1/4, bndStubL, bndFrameR},
    {1/4, 3/8, bndRayL, bndFrameR},
    {3/8, 1/2, bndRayL, bndRayR}};
  subIntBL3 := {
    {0, 1/4, bndStubL, bndFrameR},
    {1/4, 3/8, bndRayL, bndFrameR},
    {3/8, 1/2, bndFrameL, bndFrameR}};
  {findCritTsFromFunctions[subIntBL2, 4/3],
   findCritTsFromFunctions[subIntBL3, 5/3]}]

```

```

findSftIntFromFunctions :: usage=
"findSftIntFromFunctions[subIntTLX_, h0_, eps0_] estimate optimal
critical t's";
findSftIntFromFunctions[subIntTLX_, h0_, eps0_] := Module [
  {subIntTL = subIntTLX, h = h0, t0, t1, l0,
   r0, p, fq, fk, sftIntList, i, eps=eps0},
  sftIntList = {};
  For[i=1, i<=Length[subIntTL], i++,
    p=Part[subIntTL, i];
    t0=Part[p, 1]; t1=Part[p, 2];
    l0[t_] := Part[p, 3][t];
    r0[t_] := Part[p, 4][t];
    fq[t_] := Part[p, 5][t];

```

---

```

    fk[t_]:=cellsFromLeft[lo[t],r0[t],h, fq[t]];
    AppendTo[sftIntList,findSftIntBisection[t0,t1,fk,eps]]];];
sftIntList]

```

---

```

findSftIntBisection[t00_, t01_, fk_, eps0_]:= Module[
  {t0 = t00, t1 = t01, min, max,
   numOfCTs,i,a,b,c, eps = eps0,sftSubintList},
  sftSubintList = {};
  min=fk[t0];
  max=fk[t1];
  numOfCTs=max-min;
  For[i=1,i<=numOfCTs,i++,
    a=t0;b=t1;
    c=(a+b)/2;
    While[b-a>eps,
      If[fk[c]-(max-i)<=0,a=c,b=c];
      c=(a+b)/2]; (*end while*)
    AppendTo[sftSubintList,{a,b}]];(*end for i*)
  Sort[sftSubintList]]

```

---

```

findSftIntTopLayers[]:=Module[
  {eps,bndRayL1,bndRayR1,fq1,bndFrameL2,bndFrameR2,fq2i,fq2ii,
   bndFrameL3,bndFrameR3,fq3,subIntTL1,subIntTL2,subIntTL3},
  eps = 10^-10;
  (*TL1*)
  bndRayL1[t_]:= 1/4;
  bndRayR1[t_]:= 3/4;
  fq1[t_] := 4/3-t/4;
  (*TL2*)
  bndFrameL2[t_] := 1/(3 t);
  bndFrameR2[t_]:= 1;
  fq2i[t_] := 1+1/(3+3 t);(*first part*)
  fq2ii[t_] := 6/5; (*second part*)
  (*TL3*)
  bndFrameL3[t_] := 2/(3 t);
  bndFrameR3[t_] := 1;
  fq3[t_] := 1+1/(3+3 t);
  (*{t0, t1, lo, r0, fq}*)
  subIntTL1 := {
    {0, 1/3, bndRayL1,bndRayR1,fq1}};

```

---

```

subIntTL2:= {
  {1/3, 2/3,bndFrameL2, bndFrameR2,fq2i},
  {2/3, 1, bndFrameL2,bndFrameR2,fq2ii}};
subIntTL3 := {
  {2/3, 1, bndFrameL3, bndFrameR3, fq3}};
{findSftIntFromFunctions[subIntTL1,1,eps],
findSftIntFromFunctions[subIntTL2, 4/3,eps],
findSftIntFromFunctions[subIntTL3, 5/3,eps]]}

```

---

```

disjointIntervalsQ[intervals0_]:= Module[
{intervals = intervals0,numOfIntervals,aibi,order, result},
  numOfIntervals = Length[intervals];
  intervals=Flatten[intervals];
  aibi = Table[{i,i}, {i, 1, numOfIntervals}];
  aibi = Flatten[aibi];
  order = Ordering[intervals]; (*tells to which place each one
has to go*)
  result = aibi[[order]]; (*we place indexes in this order*)
  result = makePairs[result]; (*back to intervals*)
  Total[Map[If[Part[#,1] == Part[#,2], 1, 0]&, result]]
    == numOfIntervals
    (*if they are the same number in each pair*)
  && Length[DeleteDuplicates[intervals]]
    == Length[intervals] (*intervals must not touch*)
]

```

---

```

makePairs[checklist0_]:=
Module[{checklist = checklist0,checklist2, ai, bi},
  checklist2 = {};
  For[i = 1, i < Length[checklist], i = i + 2,
    ai = Part[checklist, i];
    bi = Part[checklist, i+1];
    AppendTo[checklist2,{ai,bi}]
  ];
checklist2]

```

---

```

inflateTs[tsList_,eps_]:=Module[
  {inflatedTsList, ais, bis},
  ais =tsList+eps; (*we blow up exact critical t's*)
  bis=tsList-eps; (*for eps*)

```



---

```
Inner[ List , ais , bis , List ]]
```

---

```
disjointSafetyIntervalsQ []:=Module[
{ sftIntBL , sftIntBLSim , sftIntTL ,
sftIntTLSim , sftIntBH , sftIntBHSim , sftIntAll },
  sftIntBL=inflateTs[ Flatten[ findCritTsBottomLayers [] ] , 10^-10];
  sftIntBLSim = 1-sftIntBL;
  sftIntTL = Flatten[ findSftIntTopLayers [] , 2];
  sftIntTLSim = 1-sftIntTL;
  sftIntBH = findSftIntBlakHoles [];
  sftIntBHSim = 1-sftIntBH;
  sftIntAll = Union[ sftIntBL , sftIntBLSim ,
sftIntTL , sftIntTLSim , sftIntBH , sftIntBHSim ];
  disjointIntervalsQ[ sftIntAll ]]
```

---

```
findPartsOfGlobalFunction []:=
Module[
  { fklist , tflist , i , tlist , flist },
  fklist={};
  For[ i=1, i<Length[ tflist ] , i=i+2,
    tlist =Part[ tflist , i];
    flist =Part[ tflist , i+1];
    AppendTo[ fklist , Piecewise[
      Table[ { Part[ flist , i] ,
        Part[ tlist , i]<= t<= Part[ tlist , i+1] } , { i , 1 , Length[ flist ] } ] , 0 ]];
  ];
  fklist]
```

---

```
midRationals[ sftIntAll_ ] := Module[
{ midRats , allbis , allais , i },
  midRats = {};
  allbis = Map[Max, sftIntAll];
  allbis = Part[ allbis , 1;; Length[ allbis ]-1];
  allais = Map[Min, sftIntAll];
  allais = Part[ allais , 2;; Length[ allais ]];
  Table[ Rationalize[ N[ Mean[ { allbis [[ i ] ] , allais [[ i ] ] } ] ] ,
    ( allais [[ i ] ]- allbis [[ i ] ] )/2 ] , { i , 1 , Length[ allais ] } ]];
```

---

```
findRationalsForEvaluation []:=Module[
{ subCritTs , sftIntSubCrit , sftIntBL , sftIntBLSim ,
```

---

```

sftIntTL , sftIntTLSim , sftIntBH , sftIntBHSim ,
sftIntAll , allbis , fk , fklist , fkGlobal , midRats } ,
  subCritTs = Union[{0, 1/4, 3/8, 1/2}, 1-{0, 1/4, 3/8, 1/2},
    {0, 1/3, 2/3, 1},
    {0, 3/8, 5/8}, 1-{0, 3/8, 5/8}];
sftIntSubCrit = inflateTs[subCritTs, 10^-10];
sftIntBL=inflateTs[Flatten[findCritTsBottomLayers[]], 10^-10];
(*with Map[Mean,sftIntBL] we get exact ct's back*)
sftIntBLSim = 1-sftIntBL;
sftIntTL = Flatten[findSftIntTopLayers[], 2];
sftIntTLSim = 1-sftIntTL;
sftIntBH = findSftIntBlakHoles[];
sftIntBHSim = 1-sftIntBH;
sftIntAll = Sort[Union[sftIntSubCrit, sftIntBL,
sftIntBLSim, sftIntTL, sftIntTLSim, sftIntBH, sftIntBHSim]];
midRats = midRationals[sftIntAll]

```

---

Sledi primer uporabe modulov. Na vseh sistemih varnostnih intervalov seštejemo funkcijske vrednosti vseh funkcij, prištejemo konstante in izračunamo maksimum. Rezultat je ocena za zgornjo mejo števila točk osnove delne risbe polnega grafa.

---

```

fklist = findPartsOfGlobalFunction[];
(* (B_2 + B_3 + L_1 + L_2 + L_3 + P_1 + P_2)(t) *)
fk[t_]=fklist[[1]]+fklist[[2]]+fklist[[3]]+
fklist[[4]]+fklist[[5]]+fklist[[6]]+fklist[[7]];
fkGlobal[t_]:=fk[t]+fk[1-t]+39+7;
rats = findRationalsForEvaluation[]
Max[Map[fkGlobal, rats]]

```

---

# Literatura

- [1] D. E. Knuth, “Two thousand years of combinatorics”, v knjigi R. Wilson, J. J. Watkins *Combinatorics: Ancient and Modern*, Oxford University Press, 2013, str. 7–37.
- [2] A. Bonner, “The art and logic of Ramon Llull”, v publikaciji: *Brill Academic*, 2007, str. 290.
- [3] D. Link, “Scrambling T-R-U-T-H: Rotating Letters as a Material Form of Thought”, v knjigi *Variantology 4. On Deep Time Relations of Arts, Sciences and Technologies in the Arabic–Islamic World*, 2010, str. 215–266.
- [4] T. Freeth, Y. Bitsakis, X. Moussas, J. H. Seiradakis, A. Tselikas, H. Mangou, M. Zafeiropoulou, R. Hadland, D. Bate, A. Ramsey, M. Allen, A. Crawley, P. Hockley, T. Malzbender, D. Gelb, W. Ambrisco and M. G. Edmunds, “Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera Mechanism”, v reviji: *Nature*, 30. november 2006.
- [5] R. A. Becker, S. G. Eick, A. R. Wilks, “Visualizing network data”, v *IEEE Trans. Visual Computation Graphics*, 1995, str. 16–28.
- [6] M. Burch, C. Vehlow, N. Konevtsova, D. Weiskopf, “Evaluating partially drawn links for directed graph edges”, v *M. Kreveld, B. Speckmann uredniki, Proc. 19th Int. Symp. Graph Drawing (GD’11), volume 7034 of LNCS, Springer-Verlag*, 2012, str. 226–237.
- [7] T. Bruckdorfer, M. Kaufmann, “Mad at Edge Crossings? Break the Edges!”, v *E. Kranakis, D. Krizanc, F. Luccio uredniki, Proc. 6th Int. Conf. Fun*

- 
- with Algorithms (FUN'12)*, volume 7288 of *LNCS*, Springer-Verlag, 2012, str. 40–50.
- [8] T. Bruckdorfer, S. Cornelsen, C. Gutwenger, M. Kaufmann, F. Montecchiani, M. Nöllenburg, A. Wolff, “Progress on Partial Edge Drawings”, v *Graph Drawing, Lecture Notes in Computer Science Volume 7704*, 2013, str. 67–78.
- [9] R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, knjižnica Sigma, 1997.
- [10] T. Carsten, “Kuratowski’s theorem”, v *Journal of Graph Theory* 5, 1981, str. 225–241.
- [11] P. Erdős, G. Szekeres “A combinatorial problem in geometry”, v *Compositio Mathematica*, 1935, str. 463–470.